Note Title 3/19/2021

$f(x) = 1 \qquad x_0 = 0$

$$g(y) = \begin{cases} 3 & y \neq 1 \\ 2 & y = 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 = L$

$\lim_{y \to 1} g(y) = 3 = M$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \neq \lim_{y \to L} g(y) = M$

$g(f(x)) = g(1) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = 2$

$\lim_{y \to 1} g(y) = 3$

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ 2) $\lim_{y \to L} g(y) = M$

3) x_0 è un punto di accum. per il dom $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = g(f(x))$

ALLORA

CNS perché $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$

è che sia verificata ALMENO UNA delle condizioni

a) g è continua in L ($\Rightarrow g(L) = M$)

b) g NON è definita in L ($\Rightarrow g(L)$ non esiste)

c) $\exists \sigma > 0 : \forall x \in \text{dom} f,\ |x - x_0| < \sigma,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq L$

CS] Bisogna provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom}\, f \circ g \quad |x - x_0| < \delta \quad x \neq x_0$$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon \qquad (*)$$

Fissato dunque $\varepsilon > 0$

a) Poiché g è continua in L ($M = g(L)$), $g(L) = M$

$\exists \eta > 0 : \forall y \in \mathrm{dom}\, g \quad |y - L| < \eta \Rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon \ (**)$

Dall'ipotesi 1). ($\lim f$), scelto η $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \circ g \subseteq \mathrm{dom}\, f$,

$|x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \eta$

sostituendo in $(**)$ $y = f(x)$ si ottiene $(*)$ ///

Caso b) g NON è def. in L, $g(y) \underset{y\to L}{\to} M$ (ip. 2)

per lo stesso ε

$$\exists \eta > 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom} g: \ |y-L|<\eta \ \ y \neq L$$

$$|g(y)-M|<\varepsilon$$

Per poter fare $y=f(x)$ occorre vedere

Dell'ipotesi 1), fissato η, $\exists \delta > 0 : x \neq x_0, \ |x-x_0|<\delta$ e

$x \in \operatorname{dom} f \circ g$ $\Longrightarrow$ $|f(x)-L|<\eta$

$\subseteq \operatorname{dom} f$

Per ogni x: $f(x)=L$ non si può definire $g(f(x))=g(L)$, che non è definita per l'ipotesi b)

Ne segue che

$$\forall x \in \mathrm{dom}\, f\circ g \Rightarrow f(x) \neq L$$

e, analogamente a quanto visto prima, per l'ipotesi 1

$$\exists \delta > 0 : x \in \mathrm{dom}\, f\circ g \quad |x - x_0| < \delta \quad x \neq x_0 \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L|}_{>0} < \eta$$

Ne segue (*). ▨

Caso c) $\exists \sigma > 0 : \forall x \in \mathrm{dom}\, f\circ g \quad |x - x_0| < \sigma \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq L.$

$y = f(x)$ soddisfa la condizione $y \neq L$ purché $|x - x_0| < \sigma \; x \neq x_0$

si può procedere come nel caso precedente

basta scegliere $x \in \mathrm{dom}\, f\circ g \quad |x - x_0| < \min\{\delta, \sigma\} \; x \neq x_0$ ▨

CN Per assurdo. Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$ e che nessuna delle tre condizioni a), b), c) sia vera.

Infatti, poiché b) è falsa $g(L)$ è definita.

Poiché a) è falsa g è discontinua e dunque $\boxed{g(L) \neq M}$.

Poiché c) è falsa $\forall \sigma > 0 \ \exists x \in \text{dom}\, f \circ g : |x - x_0| < \sigma$

$x \neq x_0$ e $f(x) = L$.

$\sigma = \frac{1}{n} \quad \exists x_n : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} : f(x_n) = L \Rightarrow \boxed{x_n \to x_0}$

$\in \text{dom}\, f \circ g$

$g(f(x_n)) = g(L) \ \forall n \Rightarrow \boxed{\lim_{n} g(f(x_n)) = g(L)}$

ASSURDO perché $g(L) \neq M$