Note Title 3/17/2021

$p(z)$ polinomio complesso non costante ($\deg > 0$)

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$\alpha_n \neq 0$
$\deg p = n$

$p(z_0) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\, \bar{z} : |p(\bar{z})| < |p(z_0)|$

$$q(w) = \frac{p(z_0 + w)}{p(z_0)} = 1 + \alpha_k w^k + w^{k+1} \tilde{q}(w)$$

α_k il primo non nullo coeff.

La tesi equivale a provare che $\exists\, \bar{w}$: $|q(\bar{w})| < 1$

$\Updownarrow$

$|p(z_0+\bar{w})| < |p(z_0)|$

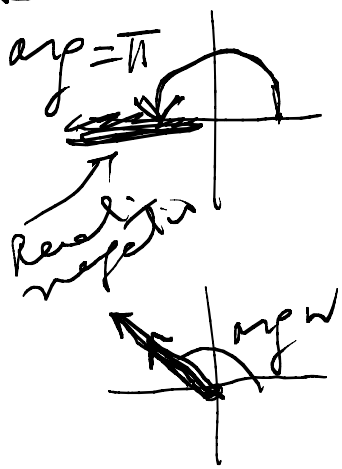
$\bar{z} = z_0 + \bar{w}$

$$|q(w)| \le \underbrace{|1+\alpha_k w^k|}_{(*)} + |w|^{k+1}\,|\tilde{q}(w)|$$

$\alpha_k w^k$ sia reale e negativo

$|\alpha_k w^k| < 1$

$\Rightarrow |1+\alpha_k w^k| = 1 - |\alpha_k w^k|$



$\arg(\alpha_k w^k) = \pi$

$\arg\alpha_k + k \arg w = \pi$

$\Rightarrow \boxed{\arg w = \dfrac{\pi - \arg\alpha_k}{k}}$

$|\alpha_k w^k| < 1 \Rightarrow \boxed{|w| < \dfrac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}}$

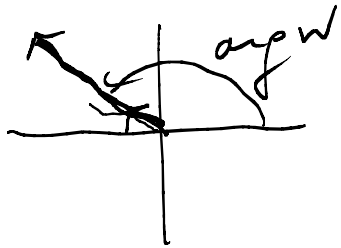
Da (*) segue

$$|q(w)| \le 1 - |\alpha_k||w|^k + |w|^{k+1}|\tilde{q}(w)| =$$

$$= 1 - |w|^k \Big[\underbrace{|\alpha_k|}_{\substack{>0 \\ \text{costante}}} - \overbrace{\underbrace{|w|}_{\to 0}\,\underbrace{|\tilde{q}(w)|}_{\to |\tilde{q}(0)|}} \Big]$$

$$|\alpha_k| > 0$$

se $w \to 0$



per il th. della perm. del segno

$$\boxed{[\quad] > 0} \text{ per ogni } w : |w| < \delta$$

$$|q(w)| \le 1 - \underbrace{|w|^k}_{>0\ w\neq 0} \underbrace{[\quad]}_{>0 \text{ purché}} < 1$$

$$|w| < \delta \qquad |w| < \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$$

$$|q(w)| < 1 \qquad q(w) = \frac{f(z_0+w)}{f(z_0)}$$

$$\frac{|p(z_0+w)|}{|p(z_0)|} < 1 \iff |p(\underbrace{z_0+w}_{z})| < |p(z_0)|$$

TEOREMA DI GAUSS (Fondamentale dell'Algebra)

Se $p(z)$ è un polinomio in $\mathbb{C}$ non costante

allora $\exists\, z^* : p(z^*) = 0$

DIM. Si considera $f(z) = |p(z)|$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\lim_{\infty} f(z) = +\infty}$ $\longrightarrow$

$\lim_{\infty} p(z) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; |z| > \delta \Rightarrow |p(z)| > \varepsilon$

vera se p è non costante

Per il teorema del minimo astratto che f, continua su $\mathbb{C}$ (completo di $|\ |$ e p, funzioni continua) divergente a $+\infty$ all'infinito ha minimo, in z^*.

(z^* è il punto di minimo di $|p(z)|$ su $\mathbb{C}$).

Se $|p(z^*)| = 0$ z^* è lo zero richiesto e la tesi è provata.

Può essere $|p(z^*)| \neq 0$? No, perché se fosse $p(z^*) \neq 0$ per il Lemma di Hermite

$\exists \bar{z} \in \mathbb{C} : |p(\bar{z})| < |p(z^*)|$ z^* non sarebbe il punto di minimo per $|p(z)|$

↑

ASSURDO

$p(x) = 1 + x^2$ $\qquad$ $p(0) = 1 \neq 0$

$x = 0$ è <u>minimo globale</u>

$1 + z^2$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\qquad$ $\lim_{y \to L} g(y) = M$

$h(x) = g(f(x))$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = M$

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \overset{\text{"}}{=\!=} \lim_{y\to L} g(y) = M$$

$y = f(x)$

FALSO!

CONTROESEMPIO

$$g(y) = \begin{cases} 3 & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$x_0 = 0$

$L = 0$

$\sin \frac{1}{x}$ è limitata in $x \neq 0$

$x \to 0$

$$\lim_{y \to L} g(y) = 3 = M$$

$L = 0$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \stackrel{?}{=}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ 3 & \text{se } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

$f(x) = 0$

$x \sin \frac{1}{x}$

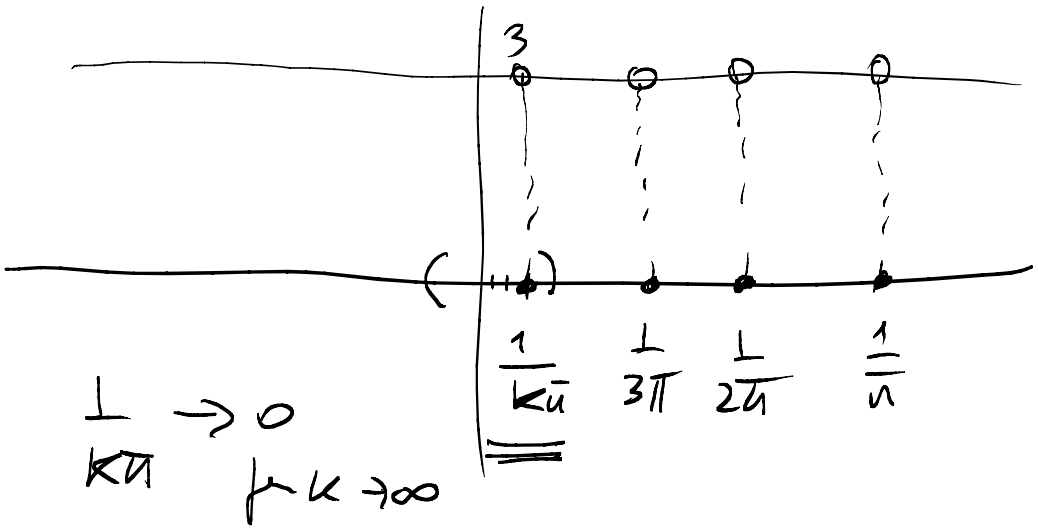
$\iff \sin \frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} = k\pi$

$x = \frac{1}{k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

La funzione composta $g(f(x))$ assume sempre il valore 3 salvo che nei punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$, in quali vale 0.

$$\begin{cases} \text{altrove } g \equiv 3 \\ g(f(x_k)) \equiv 0 \end{cases}$$



$\frac{1}{k\pi} \to 0$ per $k \to +\infty$

$\forall \delta > 0 \quad \left|\frac{1}{k\pi}\right| < \delta$

$|k\pi| > \frac{1}{\delta}$

$k > 0 \quad \boxed{k > \frac{1}{\delta\pi}}$

PSEUDO-TEOREMA di cambio di variabile.

$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\quad \lim_{y \to L} g(y) = M$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$ (ponendo $y = f(x)$)

FALSO

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}\, f \circ g \quad |x - x_0| < \delta \quad x \neq x_0$

TS

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon \longrightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$$

è vera se

$\exists \eta :$ 1) $y \in \text{dom}\, g$

2) $|y - L| < \eta$

3) $y \neq L$

2) $f(x) \in \text{dom}\, g \iff x \in \text{dom}\, f \circ g$

2) $|f(x) - L| < \eta$ vera per l'ipotesi su x

3) $f(x) \neq L$? $|x - x_0| < \delta$ opportuno, $x \neq x_0$, $x \in \text{dom}\, f$

1ª soluzione

sostituisco all'ipotesi $\lim_{y \to L} f(y) = M$

all'ipotesi **f CONTINUA IN L**

$\Downarrow$

$$\lim_{y \to L} f(y) = f(L) = M$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 :$ $\forall y \in \text{dom } f$ $|y - L| < \eta$

$$|f(y) - M| < \varepsilon$$

La condizione 3) non è presente se f è continua.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \overset{\text{"}=\text{"}}{\underset{y=x^2}{=}} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$\longrightarrow$

$x^2 \geq 0 \quad x = 0$

$x_0 = 0$

$L = 0$

$M = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x \sin\frac{1}{x}\right)}{\left(x \sin\frac{1}{x}\right)}$$

tutti i punti dove

$x \sin\frac{1}{x} = 0$ NON

fanno parte del dominio

della funzione composta

2ª soluzione

g NON E' DEFINITA in L

Il cambio di variabile è lecito se

→ 1ª) g è continua in L

→ 2ª) g non è def. in L

3ª) $\exists \delta > 0 : \underline{\underline{x \neq x_0}} \quad \underline{\underline{|x - x_0| < \delta}} \quad \underline{\underline{x \in \operatorname{dom} f}} \quad \underline{\underline{f(x) \neq L}}$