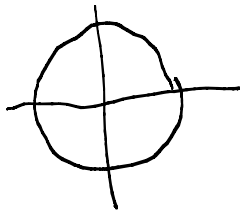
Note Title 3/10/2021

Lezione di Anna Grassellino su | computer quantistico

Canale YouTube ore 16:00 oggi

http://call.unipi.it/LezioneGrassellino2021

$$x^2+y^2-1=0$$

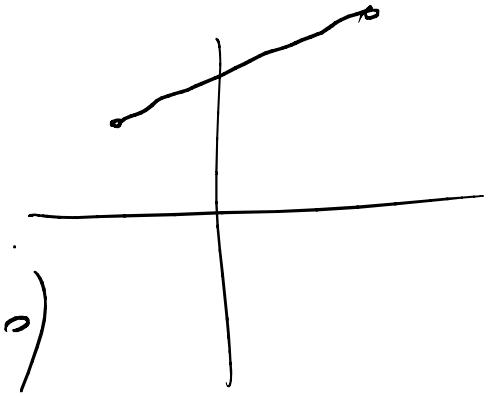


$$f(x,y)=x^2+y^2-1$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$ <u>è connesso</u>

(è anche convesso)

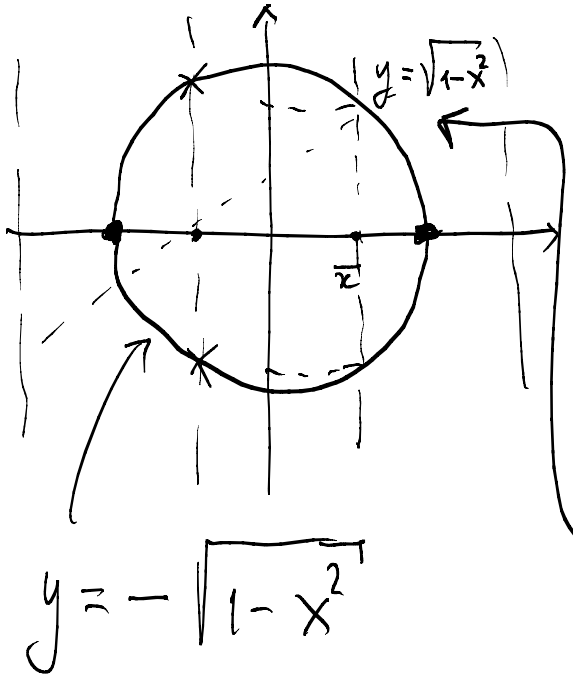


$$f(0,0)=-1$$

$$f(1,1)=1$$

$$\boxed{f \text{ ha zeri per il th. degli zeri}}$$

f è continua perché somma di prodotti di funzioni continue $g(x,y)=x$ ed $h(x,y)=y$ $(\delta=\varepsilon)$



L'insieme degli zeri in $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) = x^2+y^2-1$ NON È UN GRAFICO DI FUNZIONE

$\longrightarrow f(x,y) = 0$

$x^2+y^2-1=0$ $\boxed{y^2 = 1-x^2}$

$|x|<1$

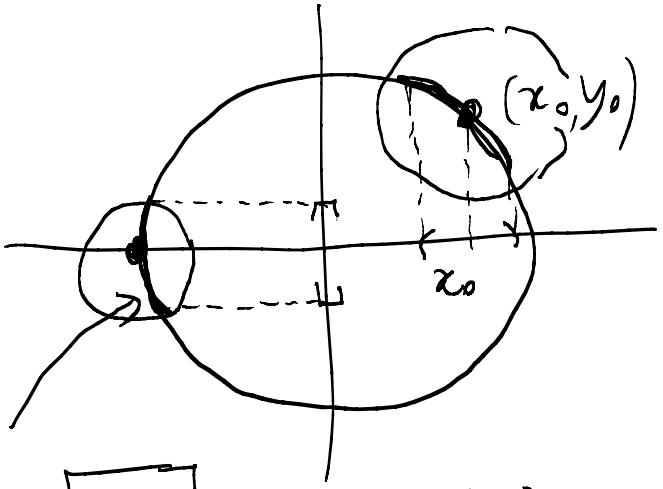
estraendo la radice

$y=\sqrt{1-x^2}$ è una "formula risolutiva" dell'equazione $x^2+y^2=1$ rispetto a y

$\forall x \in [-1,1]$

VERIFICA $x^2+(\sqrt{1-x^2})^2 = 1$ ✓

$y = -\sqrt{1-x^2}$ sol. $x^2+y^2=1$ per $y<0$



$x_0^2 + y_0^2 = 1$ $\quad (f(x_0, y_0) = 0)$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x = -\sqrt{1-y^2} = \psi(y)$

$\psi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Th. funzioni implicite}}$

$f : Q \to \mathbb{R}$

$z = x^2 + y^2 - 1$

Th. (DINI per funzioni C^0) $\boxed{f : \Omega \to \mathbb{R};\ (x_0, y_0) \in \Omega}$

1) $f(x_0, y_0) = 0$

2) f continua in Ω

3) (x_0, y_0) è interno ad Ω

4) $y \to f(x, y)$ è <u>strettamente</u> crescente $\forall x$; $(x, y) \in \Omega$

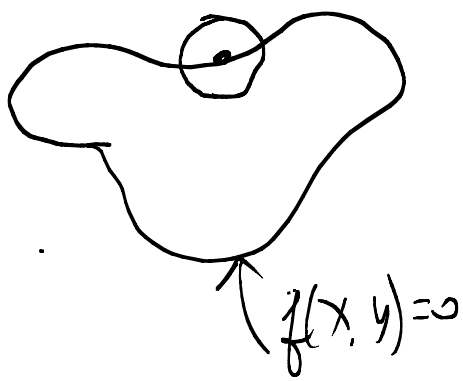
L'insieme dei punti interni ad Ω si chiama "INTERNO DI Ω" e si denota con $\mathring{\Omega}$

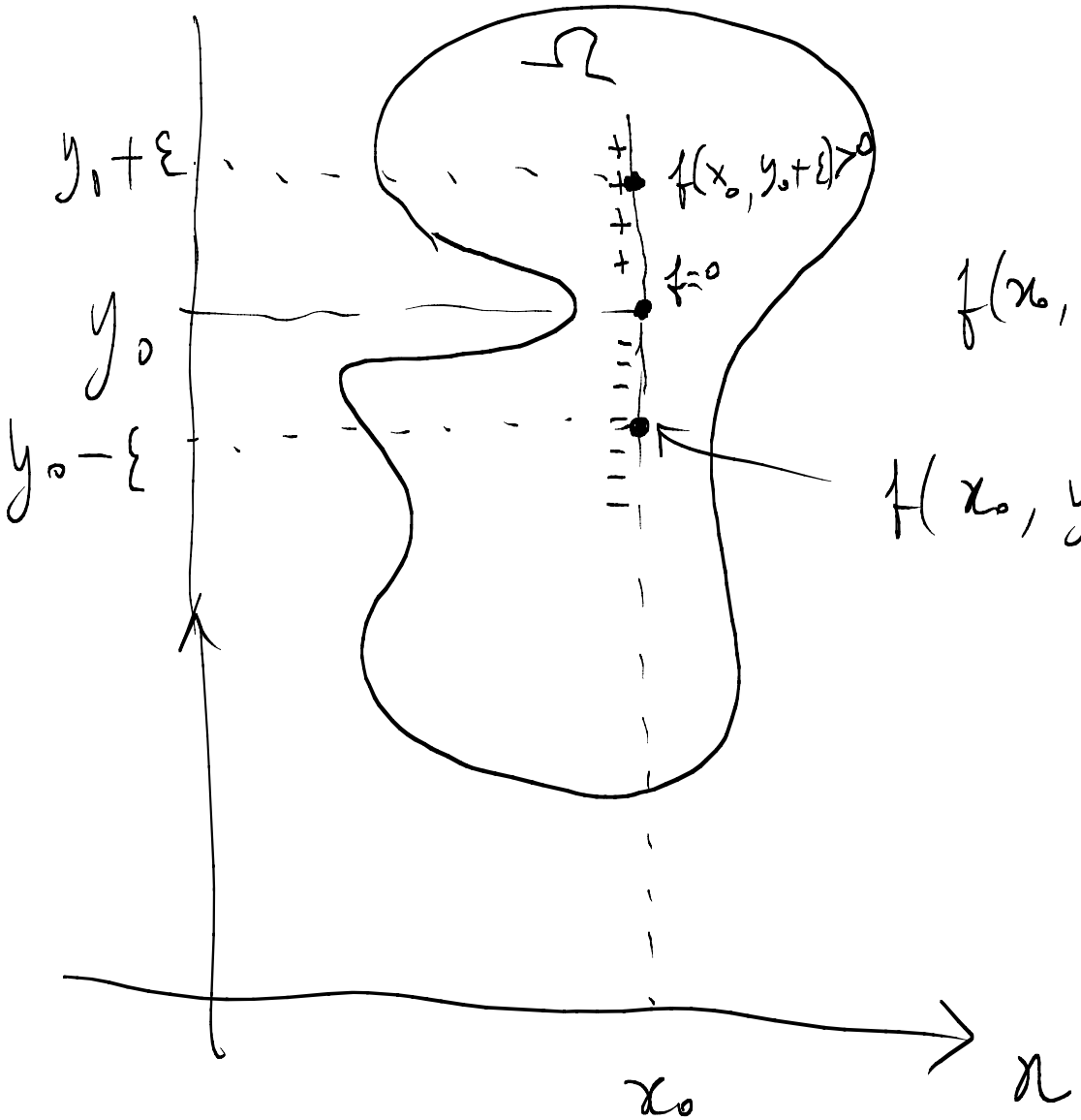
TS. 1) $\exists \delta > 0 \quad \exists \varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

2) $\varphi(x_0) = y_0$

3) $f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

4) φ continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$



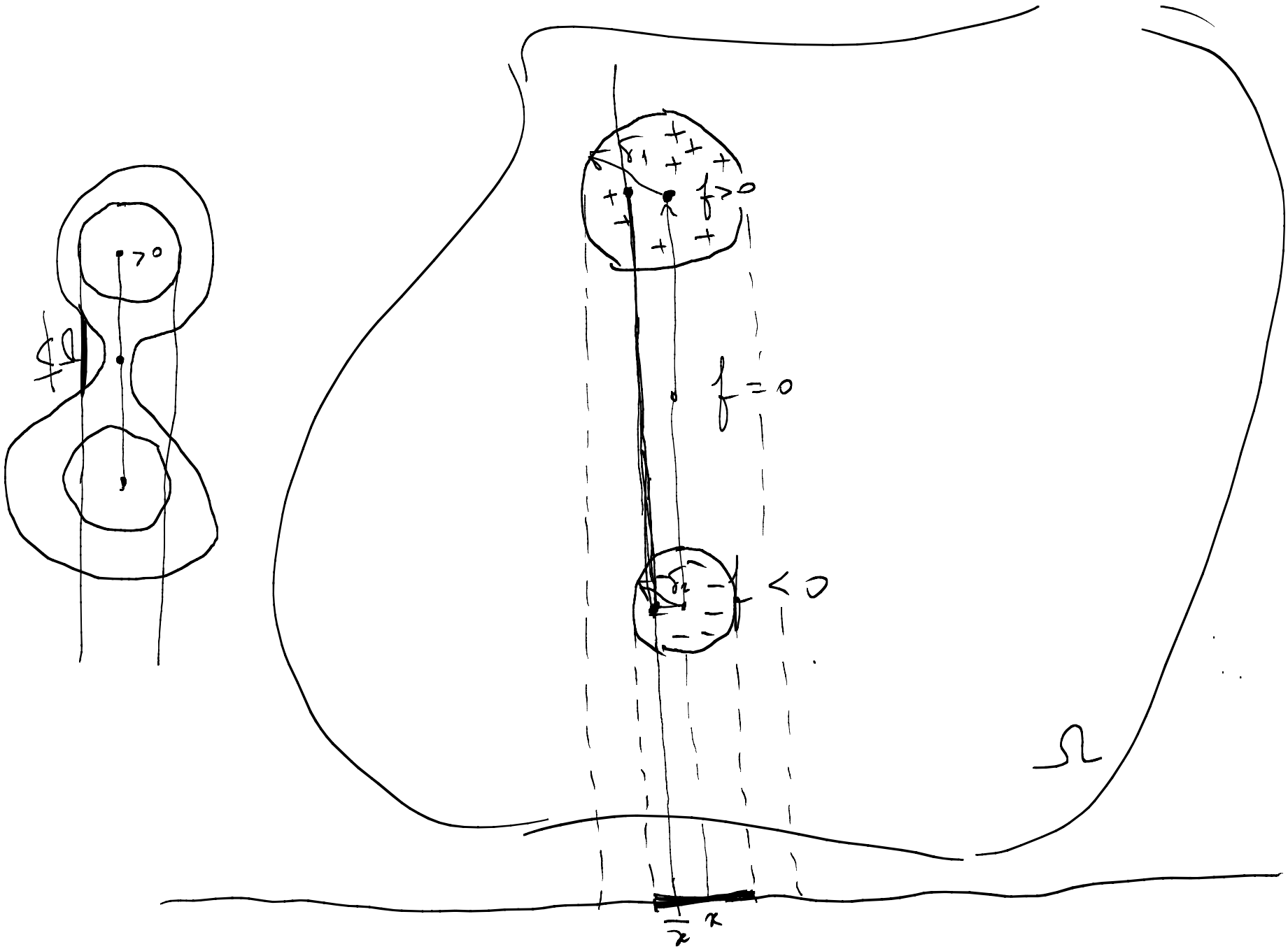


$f(x_0, y_0) = 0$

$f(x_0, y_0-\varepsilon) < 0$

NOTA

la funzione $y \to f(x,y)$ può avere, al più, un unico zero, perché è strett. mon.


>0
Ω
$f>0$
$f=0$
$f<0$
Ω
$\bar{x}$
x

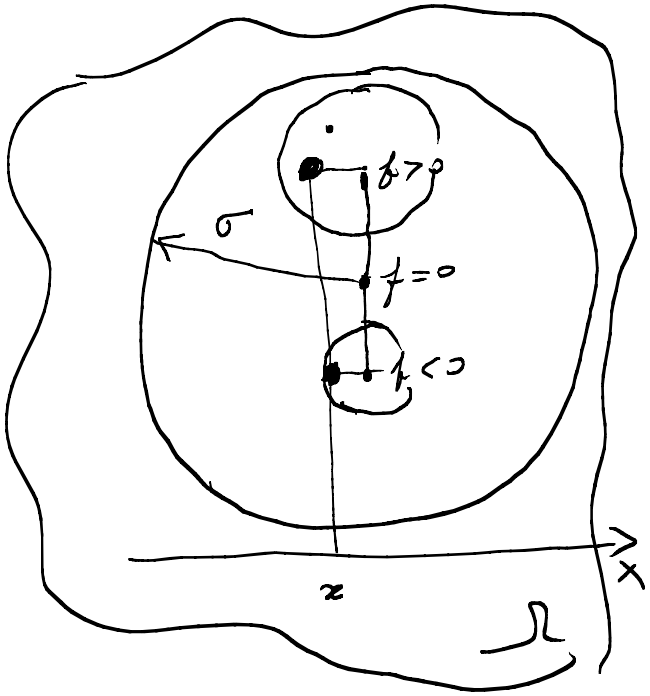
DIM

- Poiché $(x_0, y_0) \in \mathring{\Omega}$ (Hp 3) $\exists\, B_\sigma(x_0, y_0) \subseteq \Omega$

- Per $\boxed{\text{l'Hp 4}}$, scelto $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$

$$f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$



- Per il th. della permanenza del segno e per l'Hp 2)

$\exists\, \delta_1 : |x - x_0| < \delta_1 \quad f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$

$\exists\, \delta_2 : |x - x_0| < \delta_2 \quad f(x, y_0 - \varepsilon) < 0$

$$|(x, y_0 + \varepsilon) - (x_0, y_0 + \varepsilon)|_{\mathbb{R}^2} = |x - x_0|_{\mathbb{R}}$$

$y \to f(x,y)$ — è definita su $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

perché, essendo $B_\sigma(x_0,y_0)$ convessa contiene il segmento verticale di estremi $(x, y_0+\varepsilon)$ e $(x, y_0-\varepsilon)$

— È continua perché f lo è

— Assume valori discordi in $y_0-\varepsilon$ ed $y_0+\varepsilon$.

Per il th. degli zeri in $\mathbb{R}$ ha ALMENO uno zero $\bar{y}$

Per la stretta monotonia, tale zero è unico

Si pone allora $\varphi(x) = \bar{y}$

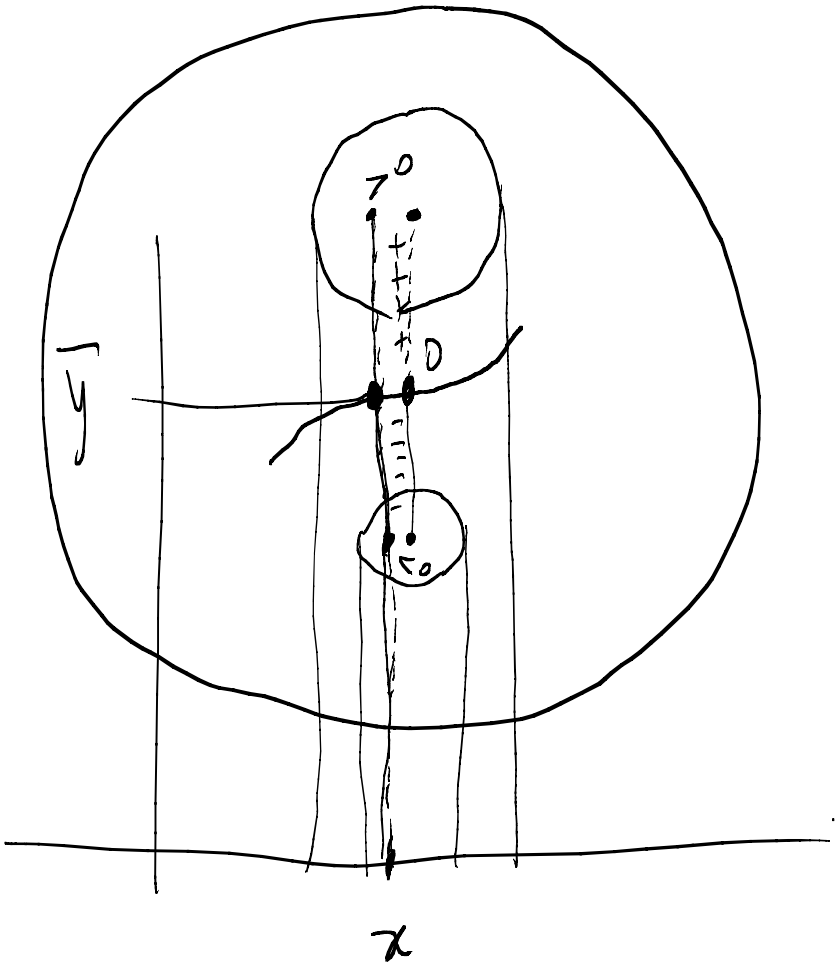
e la costruzione può essere ripetuta purché

$$|x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$\boxed{\exists\ \delta, \varphi}$

δ_1, δ_2 forniti dal th. permanenza del segno.

$\varphi(\bar{x})$ è l'ordinata dell'unico punto sulla retta $x = \bar{x}$ tale che $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0 \Longrightarrow 3)$



$y \to f(x, y)$

è definita

su $\underbrace{[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]}_{\text{intervallo}}$

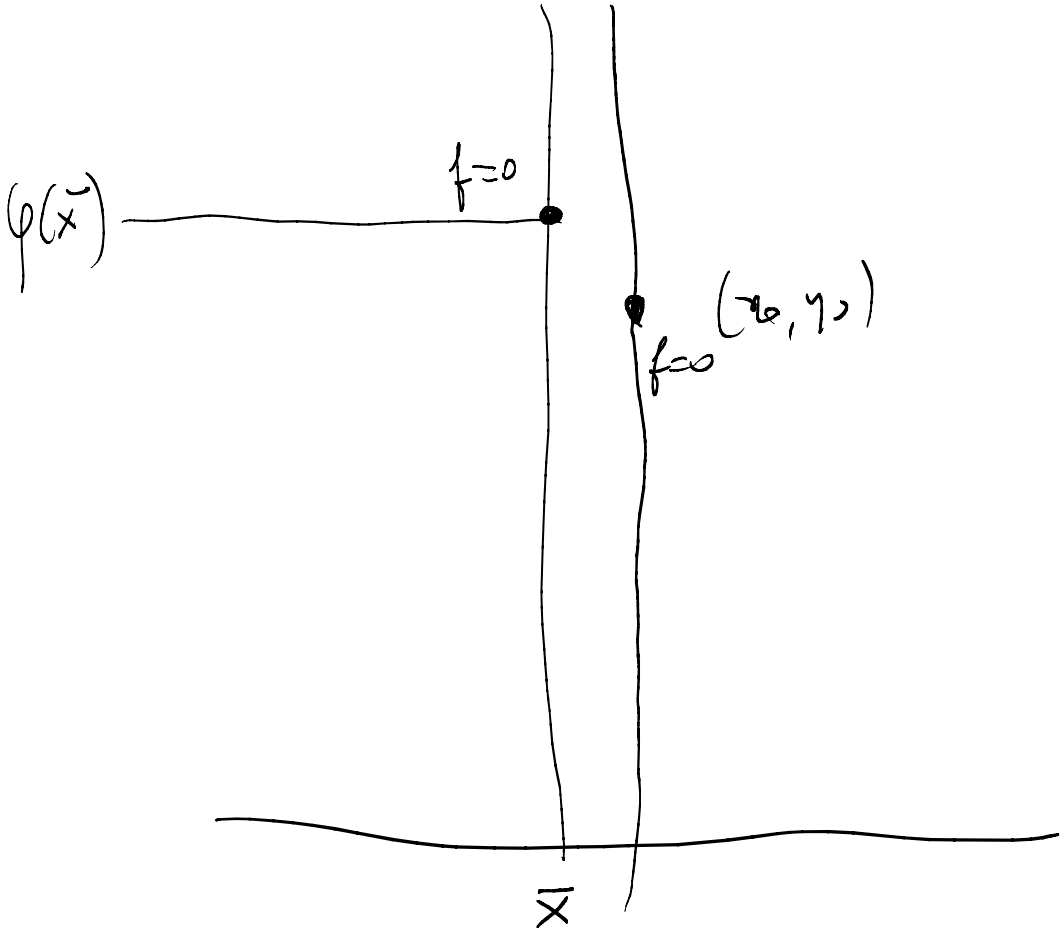
$$\boxed{f(x, \underbrace{\varphi(x)}_{\bar{y}}) \equiv 0}$$

$\varphi(x) = \bar{y}$

Dall'ipotesi 1) $f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0)$ che verifica

$f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$

$\Rightarrow$ 2)

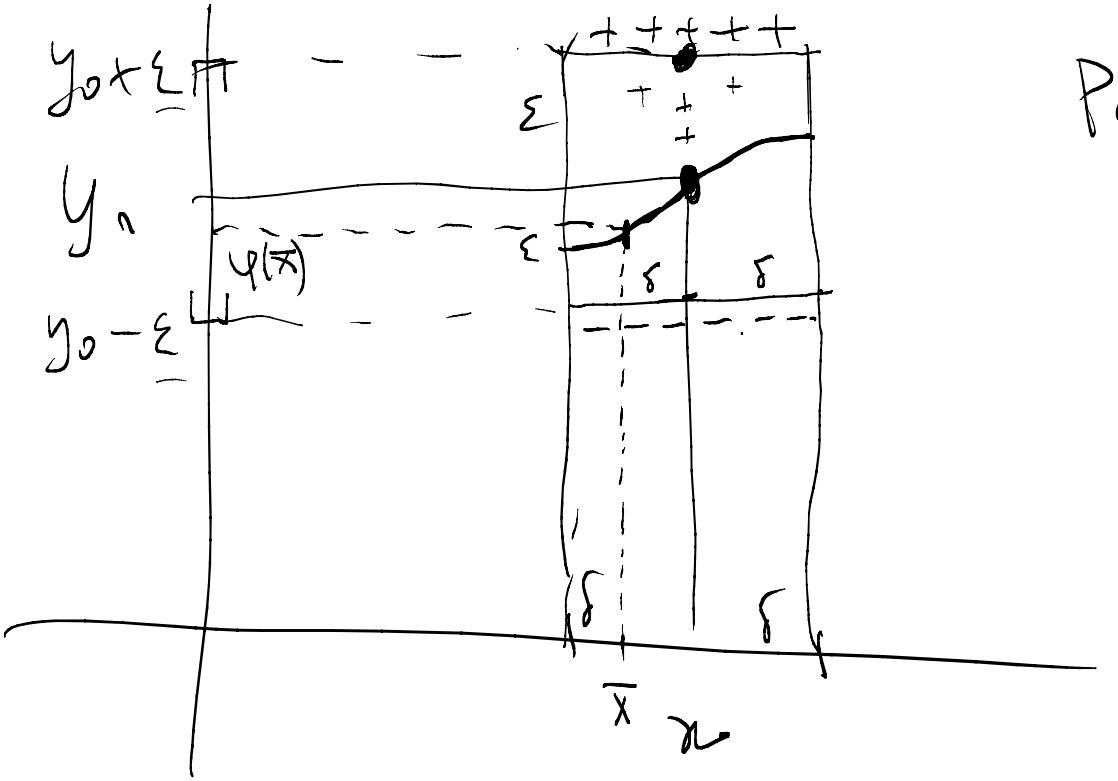


$x = x_0$ $\quad f(x_0, y_0) = 0$

$$\boxed{\varphi(x_0) = y_0}$$

φ è continua $\qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |x - x_0| < \delta$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$



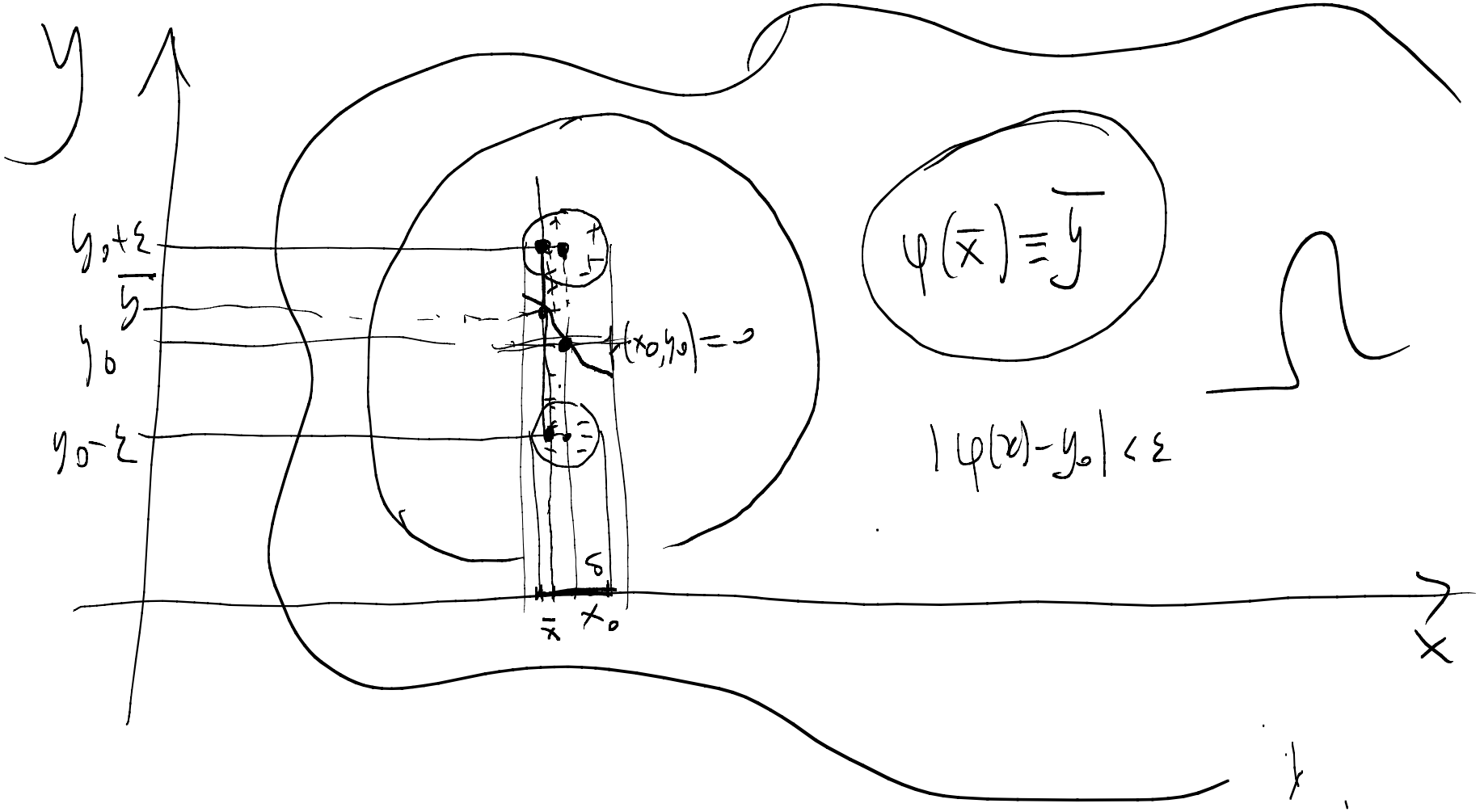
Per il th. zeri

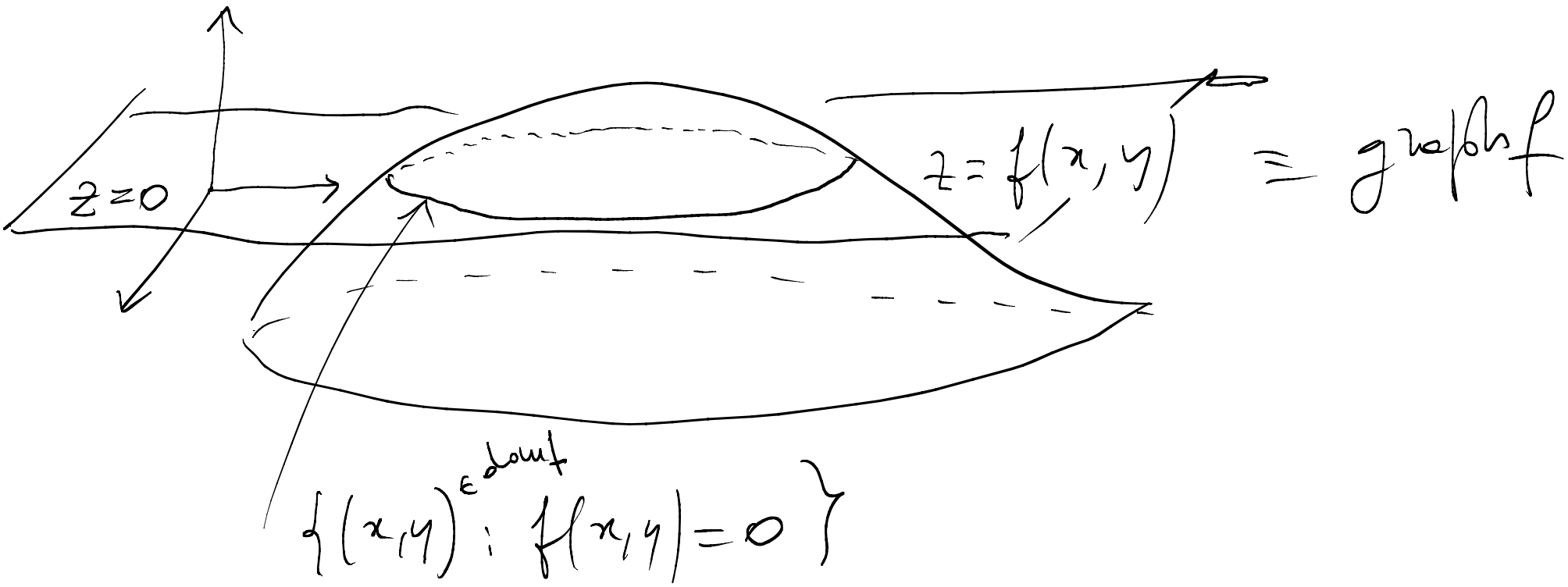
$$\varphi(x) \in \left]y_0 - \varepsilon, \ y_0 + \varepsilon\right[$$

$$\boxed{\begin{array}{c} |\varphi(x) - y_0| < \varepsilon \\ |x - x_0| < \delta \\ \| \\ \min(\delta_1, \delta_2) \end{array}}$$

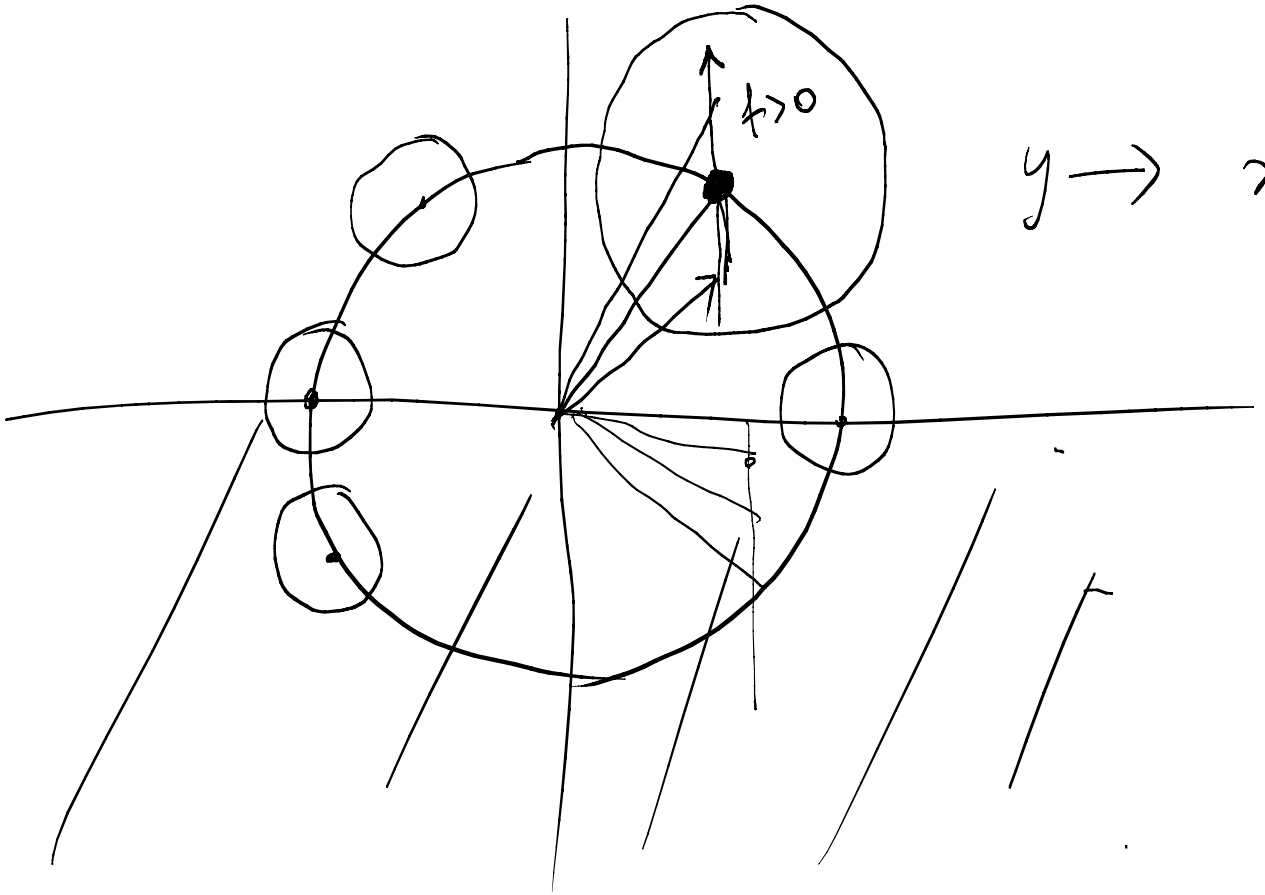
Per l'unicità degli zeri di f sulle rette verticali $\bar{x}$ appartiene ad entrambi i domini delle "due" φ

il valore che esse assumono è sempre l'unico $\bar{y}$ per cui $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$





$$\underline{f(x,y) \equiv 0}$$



$y \longrightarrow x^2+y^2-1$ è crescente in y

$f(x,y) = x^2+y^2-1$ è strett. cresc. in y se $y>0$