Note Title 3/3/2021

$a_n \to L$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \quad |a_n - L| < \varepsilon$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$ = dim del codominio)

$L \in \mathbb{R}^N$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \iff \lim |a_n - L| = 0$

norma in $\mathbb{R}^N$: $|a_n - L| - 0| < \varepsilon$ $\quad n \to |a_n - L|$ è una successione scalare

$\Leftrightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ modulo in $\mathbb{R}$ (valore assoluto)

overloading

---

in $\mathbb{R}^1$

$\lim a_n = +\infty$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \ \ a_n > \varepsilon$

$\lim a_n = -\infty$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \ \ a_n < -\varepsilon$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$

$a_n \to \infty$

$\lim a_n = \infty$

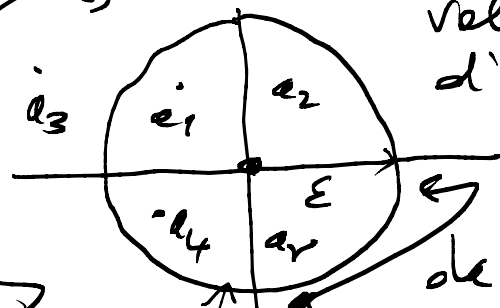
$\lim_n a_n = \infty$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : n > \nu \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$

$\lim |a_n| = +\infty$

Tutti i valori (vett.) di a_n sono fuori da $B(0, \varepsilon)$



a_n $n > \nu$

se $n > \nu$

$\overline{B}(0, \varepsilon)$ sferа $|| \leq \varepsilon$

dentro

N = 1

$\lim a_n = \infty$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : n > \nu \ |a_n| > \varepsilon$

$|a_n|$ valore assoluto

$1, -2, 3, -4, 5, -6$ $\qquad (-1)^{n+1} n$ $\qquad |(-1)^{n+1} n| = n \uparrow +\infty$

$a_n \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \quad |a_n| > \varepsilon$

def

$b_n = |a_n| \to +\infty$ $\quad$ An 1 $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \quad b_n > \varepsilon$

b_n = $|a_n|$

scelgo

$|a_n|$

$$a_n \to L \iff \lim |a_n - L| = 0$$

$$a_n \to \infty \iff \lim |a_n| = +\infty$$

---

successioni e intorni

In $\mathbb{R}^1$ $\quad \exists H, K : \quad H \leq a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

H, K $\in$ intervallo in $\mathbb{R}^N$, $N > 1$

Alternativa $\exists k$: $|a_n| \le k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$-k \le a_n \le k$

$-1 < a_n < 2 \Rightarrow -2 < a_n < 2 \Leftrightarrow |a_n| < 2$

(↑ aperto; ↑ aperto)

In $\mathbb{R}^N$, $N > 1$

la successione a_n è LIMITATA se $\exists k$:

$\rightarrow \quad |a_n| \le k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

cioè

A CHIACCHIERE

Esiste una sfera $B(0,k)$ di centro 0 e raggio k tale da contenere tutti i valori assunti dalla successione.

a_n si dice NON LIMITATA se

$\forall k>0 \; \exists n : |a_n| > k$

0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4 ....,

NON È LIMITATA

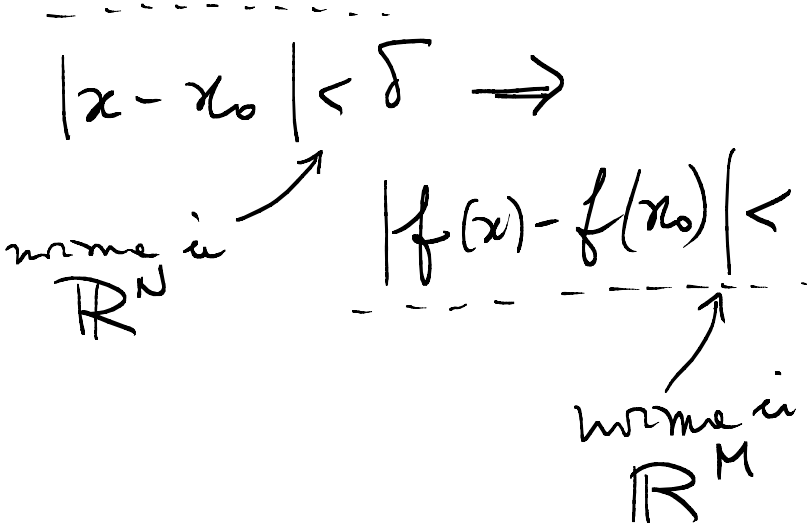
NON È DIVERGENTE

FUNZIONE CONTINUA da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ad $\mathbb{R}^M$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

f è continua in $x_0 \in \Omega$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



Th. Composizione di funzioni continue è continua.

$f : \Omega \to \Sigma$ $\quad g : \Sigma \to \textcircled{H}$

f continua in $x_0 \in \Omega$

g continua in $f(x_0)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^M$

$\textcircled{H} \subseteq \mathbb{R}^P$

Allora, posto $h(x) = g(f(x))$ si ha che h è continua in x_0.

DIM.

$\forall \sigma > 0 \ \exists \eta > 0 : \forall x \in \Omega \ |x - x_0| < \eta \quad |f(x) - f(x_0)| < \sigma$ (continuità di f in x_0)

HP

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0 : \forall y \in \Sigma \quad |y - f(x_0)| < \rho \quad |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (continuità di g in $y = f(x)$)

$$\left[\forall \varepsilon>0 \quad \boxed{\exists \delta>0} : \forall x \in \Omega \quad |x-x_0|_{\mathbb{R}^N} < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon\right]$$

TS

obiettivo

ε della tesi

$$|g(\underbrace{f(x)}_{y}) - g(f(x_0))|_{\mathbb{R}^P} < \varepsilon$$

per l'ipotesi II è vera se $f(x) \in \Sigma$, ed è vera se

$$|f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^M} < \rho$$

$|f(x) - f(x_0)| < \rho$ è vera per l'ip. 1, prendendo

$$\boxed{\sigma = \rho}, \quad \forall x \in \Omega$$

$$|x - x_0| < \eta$$

Ne segue, ponendo $\delta = \eta$ la tesi

E' vero che $f: A \to \mathbb{R}$, f continua in A, $A \subseteq \mathbb{R}$

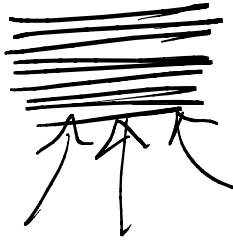
$f(a)f(b)<0 \Longrightarrow \exists\, \bar{x} : f(\bar{x})=0$?

A INTERVALLO Attenzione è FALSO

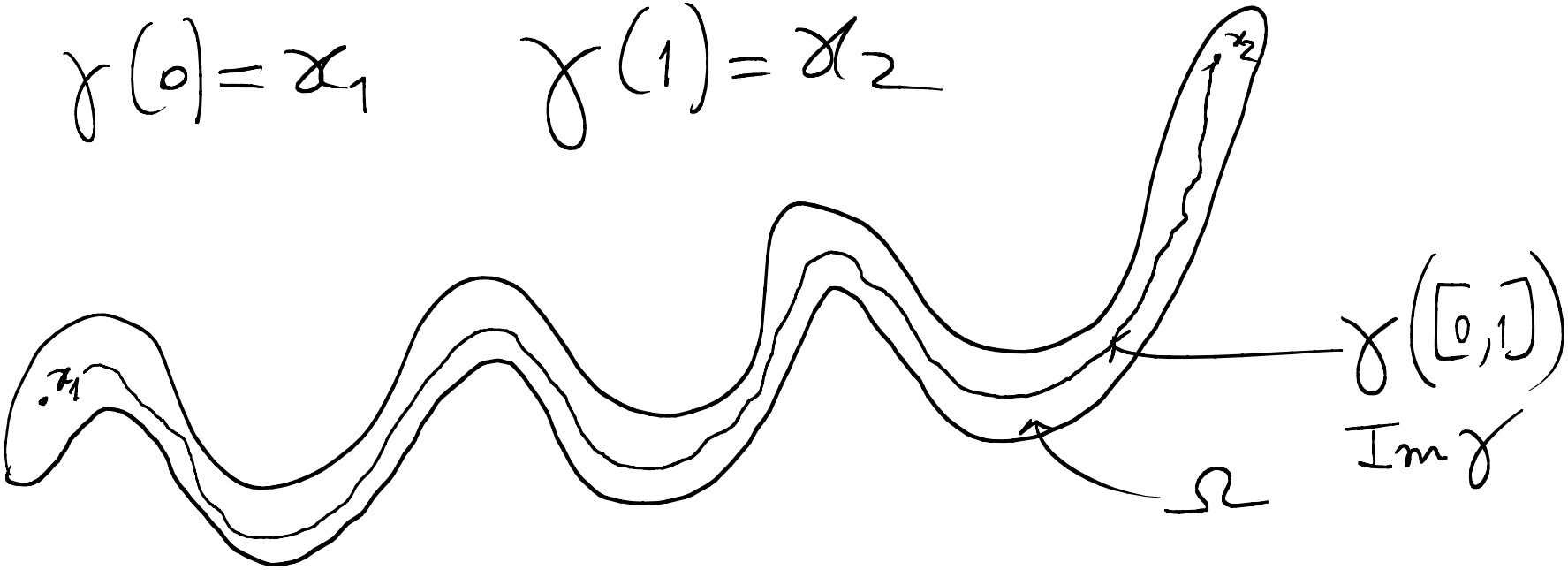
$f(x)=\frac{1}{x}$ oppure $f(x)' = \frac{x}{|x|}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ sarà detto CONNESSO (curva in Ω)

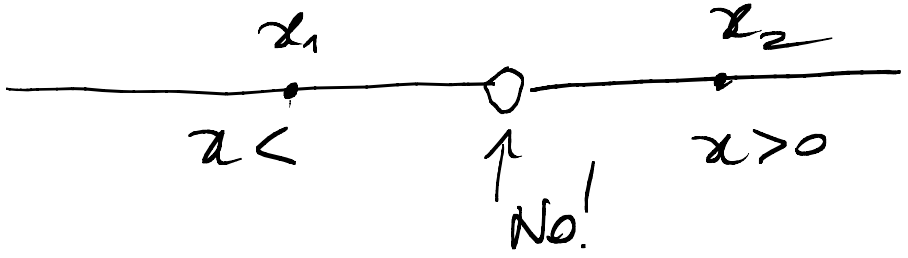
se $\forall x_1, x_2 \in \Omega \;\; \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$,

continua in ogni punto di $[0,1]$ tale che 

$\gamma(0) = x_1 \qquad \gamma(1) = x_2$

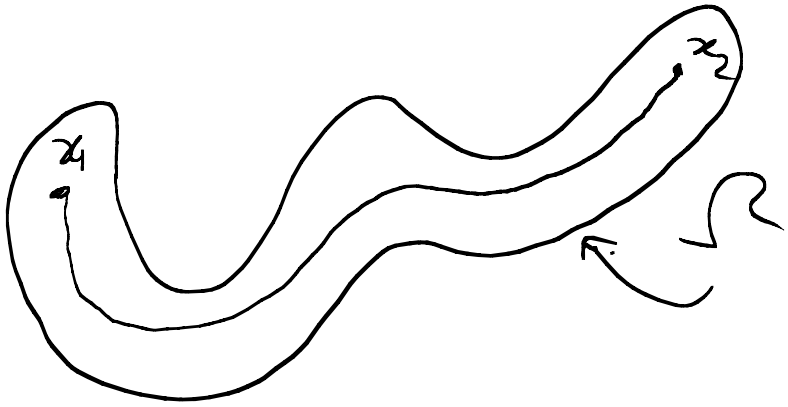


In $\mathbb{R}^1$ $\Omega = \{x \neq 0\}$ (che è il dominio di $\frac{1}{x}$ e $\frac{x}{|x|}$)



Th (degli zeri in $\mathbb{R}^N$) Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, continua in Ω, $f(x_1) f(x_2) < 0$, Ω sia connesso.

Allora $\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$



DIM

Per la connessione di Ω

$\exists\, \gamma: [0,1] \to \Omega$ continua

tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$.

Si definisce $h(t) = f(\gamma(t))$

h è continua perché composta di funzioni continue γ ed f $\Longrightarrow$

$h: [0,1] \to \mathbb{R}$

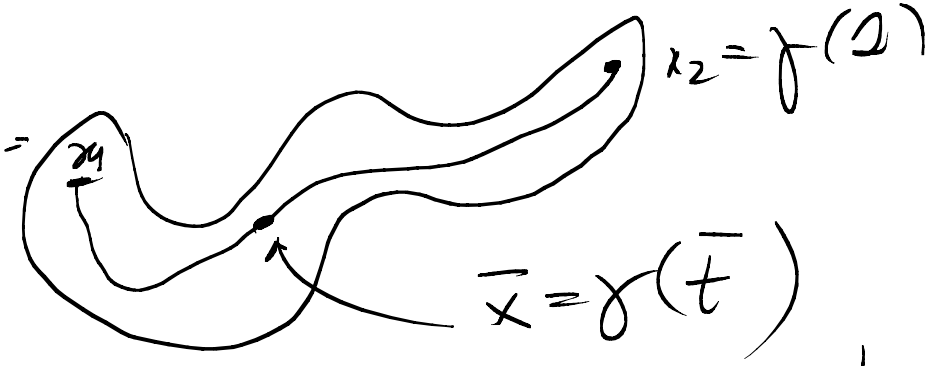
$h(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1)$

$h(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2)$

h continua in $[0,1]$

per il teorema degli zeri in $\mathbb{R}$ (Weierstrass)

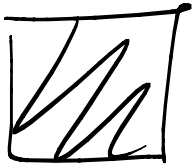
$\exists\, \bar{t} \in [0,1] : h(\bar{t}) = 0$



$h(\bar{t}) = f(\gamma(\bar{t}))$

$\bar{t}$ è lo zero di h

se si pone $\bar{x} = \gamma(\bar{t})$, allora $\bar{x} \in \Omega$ e inoltre $f(\bar{x}) = 0$

$\in \Omega$

$f(\bar{x}) = 0$