Note Title 2/9/2021

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\lim_{y \to L} g(y) = M$

$\Longrightarrow ?$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ f(x) \to L}} g(y) = \lim_{y \to L} g(y)$ (where $f(x) = y$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \neq x_0, \ |x - x_0| < \delta, \ x \in \operatorname{dom} f \circ g \Rightarrow |g(f(x)) - M| < \varepsilon$

$|g(\underbrace{f(x)}_{y}) - M| < \varepsilon$ quando?

$\lim_{y \to L} g(y) = M$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 :$

δ —

x
- $y \neq L$
- $|y - L| < \eta$
- $y \in \text{dom } g$

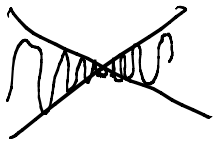
Se f assume infinite volte nell'intorno di x_0 il valore "sbagliato" L, $g(f(x))$ NON È DEFINITA per tale x

$$g = \begin{cases} 1 & y \neq 0 \\ -1 & y = 0 \end{cases}$$

ha limite 1 ($M=1$) in $L=0$

$$\lim_{y \to 0} g(y) = 1$$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = L$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi} \\ & k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\dim X \cap Y = k > 0$

$w_1 \dots w_k$ base di $X \cap Y$

$w_1 \dots w_k \; x_{k+1} \dots x_n$ base di X

$w_1 \dots w_k \; y_{k+1} \dots y_m$ base di Y

$w_1 \dots w_k \; x_{k+1} \dots x_n \; y_{k+1} \dots y_m$ sono una base di $X+Y$

sono ld.

$$\underbrace{\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i}_{w} + \underbrace{\sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_{k+1}^{m} \gamma_h y_h}_{y} = 0$$

$$\underbrace{w+x}_{\in X} = \underbrace{-y}_{\in Y} \Rightarrow \begin{matrix} w+x \\ y \end{matrix} \in X \cap Y$$

$(w+y)+x = 0$

$\in X \cap Y$

$\| \quad \in \langle x_{k+1} - x_n \rangle$

$\langle w_1 - w_k \rangle$

Perché $w_1 - w_k \, x_{k+1} - x_n$ è una base di X

$X = \langle w_1 - w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1} - x_n \rangle$

$(w+y)+x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (w+y=0)$

$\sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j = 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \; \forall j = k+1 \dots n$

$\sum \alpha_i w_i + \sum \gamma_h y_h = 0$

$\alpha_i = 0 \; \forall i, \; \gamma_h = 0 \; \forall h$

$u_1 \dots u_n$ base di X

$X = \langle u_1 \dots u_k \rangle \oplus \langle u_{k+1} \dots u_n \rangle$

Th. unicità della base.

$X = \langle u_1 \dots u_k \rangle + \langle u_{k+1} \dots u_n \rangle$

$\forall x \in X \quad \exists \alpha_i : x = \sum_1^n \alpha_i u_i = \sum_1^k + \sum_{k+1}^n$ $\in$ $\in$

$v \in \langle u_1 \dots u_k \rangle \Rightarrow v = \sum_1^k \alpha_i u_i$

$w \in \langle u_{k+1} \dots u_n \rangle \Rightarrow w = \sum_{k+1}^n \beta_j u_j$

$v + w = 0 \Rightarrow \sum_1^k \alpha_i u_i + \sum_{k+1}^n \beta_j u_j = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \ \ \beta_j = 0 \ \forall j$ (indip)

$\Rightarrow v = 0$ e $w = 0$.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad v \neq 0$

$$f_v(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} =$$

$h(t) = f(x_0 + tv)$

$f_v(x_0) = \underline{\underline{h'(0)}}$

$t \to x_0 + tv$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$

$w \to f(w)$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

Hessiana $\quad H(x)$ $\quad H_f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\forall \rho > 0 \quad \exists x \in \Omega : x \notin B(0,\rho)$

$|x| > \rho$

Ω non è limitato

Ω è limitato se $\exists \rho : \Omega \subseteq B(0,\rho)$

$\forall \rho > 0 \quad \exists x \in \Omega : |x| \geq \rho$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$ || $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\lim_{y \to L} g(y) = M$

?

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \boxed{x \neq x_0}$

$|x - x_0| < \delta, \; x \in \operatorname{dom} f \circ g$

$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \overset{f(x)=y}{=\!=} \lim_{y \to L} g(y) = M$

$f(x) \to L$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$

$\lim_{y \to L} g(y) = M$

$\Downarrow$

$\rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$

puché

$|y - L| < \eta$

$y \neq L$ ←

$y \in \text{dom } g$

è vera se

$|f(x) - L| < \eta$ ($\exists \delta$ puché $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$)

$f(x) \neq L$ ←

$f(x) \in \text{dom } g$

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$g(y) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -1 & \text{se } \frac{1}{x} = k\pi \quad x = \frac{1}{k\pi} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$

X $\quad e_1 \dots e_n$ base

$e'_1 \dots e'_n$

$$e'_j = M_{ij}\, e_i = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\, e_i$$

coordinate di e'_j rispetto ad $e_1 \dots e_n$ ("base vecchia")

j-esima colonna di M.

elementi "nuova" della base

AL_6.4 (anche 6.3)

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum x_i A_i = b$$

$\hookrightarrow$ colonne di A

Hp. $\det A \neq 0$

$\det(A_1 \dots A_n) \neq 0$

colonne i-esima

$$\text{allora} \quad x_i = \frac{\det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1} \dots A_n)}{\det A}$$

Es. $$x_1 = \frac{\det(b, A_2, A_3, \dots, A_n)}{\det(A_1, A_2, \dots A_n)}$$

La somma di $X_1, \dots, X_n$ sottospazi di Y è diretta se

$$\forall x_1, \dots, x_n, \quad x_i \in X_i \ \forall i = 1 \dots n$$

tali che $\sum_1^n x_i = 0$ segue $x_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i \quad \text{se e solo se}$$

1) $X = \sum_1^n X_i$

2) $\forall x_1 \dots x_n : x_i \in X_i \ \forall i$ e $\sum_1^n x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i$

$$x_{<u_1 \dots u_n>} = \sum \alpha_i u_i$$

ove α_i verificano il sistema

$$\left[x - \sum \alpha_i u_i\right] u_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$\exists \alpha_i$?

Th. Gram (S) (risultato se $u_1 \dots u_n$ sono indip)

ci dice che il sistema ha almeno

$$x u_j = \sum_i^n \alpha_i u_i u_j$$

j fisso
i scorre

incognite sono $\alpha_1 \dots \alpha_n$

α_1	α_2	α_3	α_n	
$u_1 u_1$	$u_2 u_1$	$u_3 u_1$	$\dots$ $u_n u_1$	$x u_1$ ←
$u_1 u_n$	$u_2 u_n$	—	— $u_n u_n$	$x u_n$ ←

$$\begin{pmatrix} u_1 u_1 \\ \\ u_1 u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 u_1 \\ \\ u_2 u_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} u_n u_1 \\ \\ u_n u_n \end{pmatrix}$$

sono multiple (seguendo che $u_1 \cdots u_n$ lo sono)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 u_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 u_1 u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 u_2 u_1 \\ \\ \lambda_2 u_2 u_n \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \lambda_n u_n u_1 \\ \\ \lambda_n u_n u_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\sum_1^n \lambda_i u_i\right) u_1 = 0$$

$$\left(\sum_1^n \lambda_i u_n\right) u_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum \lambda_i u_i\right) u_n = 0$$

moltiplic. l'eq. i-esima per λ_i e sommando membro a membro si ha

$$\left(\sum_1^n \lambda_i u_i\right)\left(\sum_1^n \lambda_i e_i\right) = 0$$

se segue $\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right|^2 = 0 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ e dall'ind.lin. di $u_1 - u_n$

segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$u_{<u_1 - u_n>}$ è ben definita se $u_1 - u_n$ sono ind.lin

Th. unico $v, w \in X$: $x - v \perp X$, $x - w \perp X$ ($v - w \in X$, $x \in X$)

v e w coincidono due punti proiezione x su X

$(x - v) y = 0 \ \forall y \in X$

$(x - w) y = 0 \ \forall y \in X$

$\Rightarrow (v - w) y = 0 \ \forall y \in X$

$y = v - w \Rightarrow (v - w)(v - w) = 0 \Rightarrow v = w$

quindi

$$X = \langle u_1 \dots u_n \rangle$$

$\exists$ esiste una base $u_{i_1} \dots u_{i_k}$ $\quad \langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle = X$

per il th. di Grassm $\exists$ $x \in \langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle = \sum \alpha_j u_{i_j}$

$\in X$

$A: X \to X$ $e_1 \dots e_n$ base di X

— A si dice DIAGONALE rispetto a $e_1 \dots e_n$ se la sua matrice associata ad $e_1 \dots e_n$ è diagonale.

— si dice DIAGONALIZZABILE se esiste una base $e_1 \dots e_n$: A è diagonale rispetto ad essa.

$$X = \bigoplus_{1}^{n} X_i \iff \dim X = \sum \dim X_i$$

$\Longrightarrow$

$x_1^1 \dots x_{k_1}^1$ base di $X_1 \Rightarrow \dim X_1 = k_1$

$\vdots$

$x_1^n \dots x_{k_n}^n$ base di $X_n \Rightarrow \dim X_n = k_n$

Si prova che $\boxed{x_1^1 \dots x_{k_1}^1 \; x_1^2 \dots x_{k_2}^2 \dots x_1^n \dots x_{k_n}^n}$ (x_j^i) sono una base di X. Se hanno numero è $\sum \dim X_i$.

① $X = \sum_{1}^{n} X_i$ e quindi ogni vettore $x \in X$ si può scrivere come somma di $u_i \in X_i$.

prodotti come combinazione di tutti i vettori x_j^i

$$x = \underbrace{u_1}_{\in X_1} + u_2 + \dots + \underbrace{u_n}_{\in X_n}$$

$$\sum_1^{k_1} \alpha_i^1 x_i^1 + \dots + \sum_1^{k_n} \alpha_i^n x_i^n \in \langle x_j^i \,,\ \begin{matrix} i=1..n \\ j=1..k_i \end{matrix} \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boxed{\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i x_j^i} \in \quad = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\sum_1^{k_1} \alpha_j^1 x_j^1}_{\in X_1} + \underbrace{\sum_1^{k_2} \alpha_j^2 x_j^2}_{\in X_2} + \dots + \underbrace{\sum_1^{k_n} \alpha_j^n x_j^n}_{\in X_n} = 0$$

pokud $X = \bigoplus X_i$ ne zeptám se

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i x_j^i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

pokud $x_1^i \dots x_{k_i}^i$ jsou lin. nezávislé $\alpha_j^i = 0 \quad \forall j = 1 \dots k_i$

x	y	
2	1	2
1	1	4

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$$

1 colonne

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-4}{1} = -2$$

I compris dans

déterminant

II colonne

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8-2}{1} = 6$$

II compris dans

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- X è di dim. infinita se non ha sottoinsiemi di generatori

- X è di dim $= 0$ se $X = \{0\}$

- se X è di dim $< \infty$, la dimensione è il numero di elementi di una qualunque base.

$$(AB)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} A_{ih} B_{hj} \equiv \underline{A_{ih} B_{hj}} \qquad \begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n \times p} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots p \end{matrix}}$$

AL_6.4

$A(e_j) = A_{ij}\, e'_i$

$e_1 \dots e_n$ base di X

$e'_1 \dots e'_m$ base di Y

matrice associata

$$A(x) = A_{ij}\, x_j\, e'_i \qquad \text{or} \qquad x = x_j\, e_j$$

$$A(x) = A(x_j e_j) = x_j\, A(e_j) = x_j\, A_{ij}\, e'_i$$

Matrice A per vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$