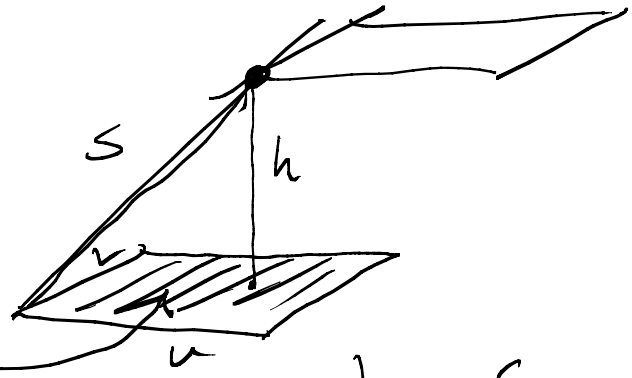
Note Title 1/26/2021

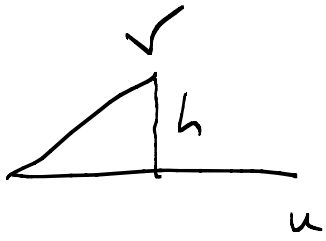
$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,1,1,1)$

Area =



$$\sqrt{|u|^2|v|^2-(uv)^2}$$

$$|h| = |s - s_{\langle u,v\rangle}|$$



$$h = (v - s_u)$$

$A : X \longrightarrow Y$ $\quad$ X, Y di altra fonte (non nulla)

$e_1 \dots e_n$ base di X

$e'_1 \dots e'_m$ base di Y

La matrice associata è M, relativa a

$$A(e_j) = M_{ij}\, e'_i \qquad \in Y$$

Einstein

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}$$

$$A(x) = (M_{ij}\, x_j)\, e'_i \qquad x_j e_j = x$$

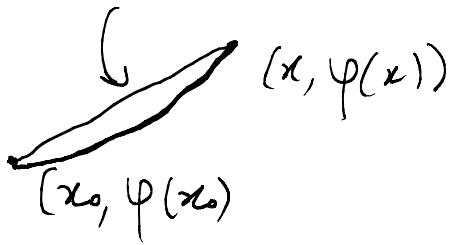
AL_6.4

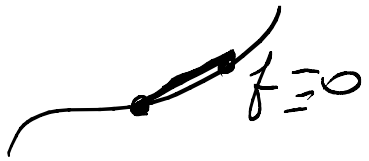
e AL_6.2

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Rightarrow A(x) = \sum_{\text{ln. } j=1}^{n} x_j A(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} M_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j} e'_i$$

$$\left[M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]_i$$





$$f(x,\varphi(x)) - f(x_0,\varphi(x_0)) = f_x\big(x_0 + t(x-x_0),\ \varphi(x_0) + t(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)(x-x_0) +$$

$$+ f_y(\quad)\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)$$

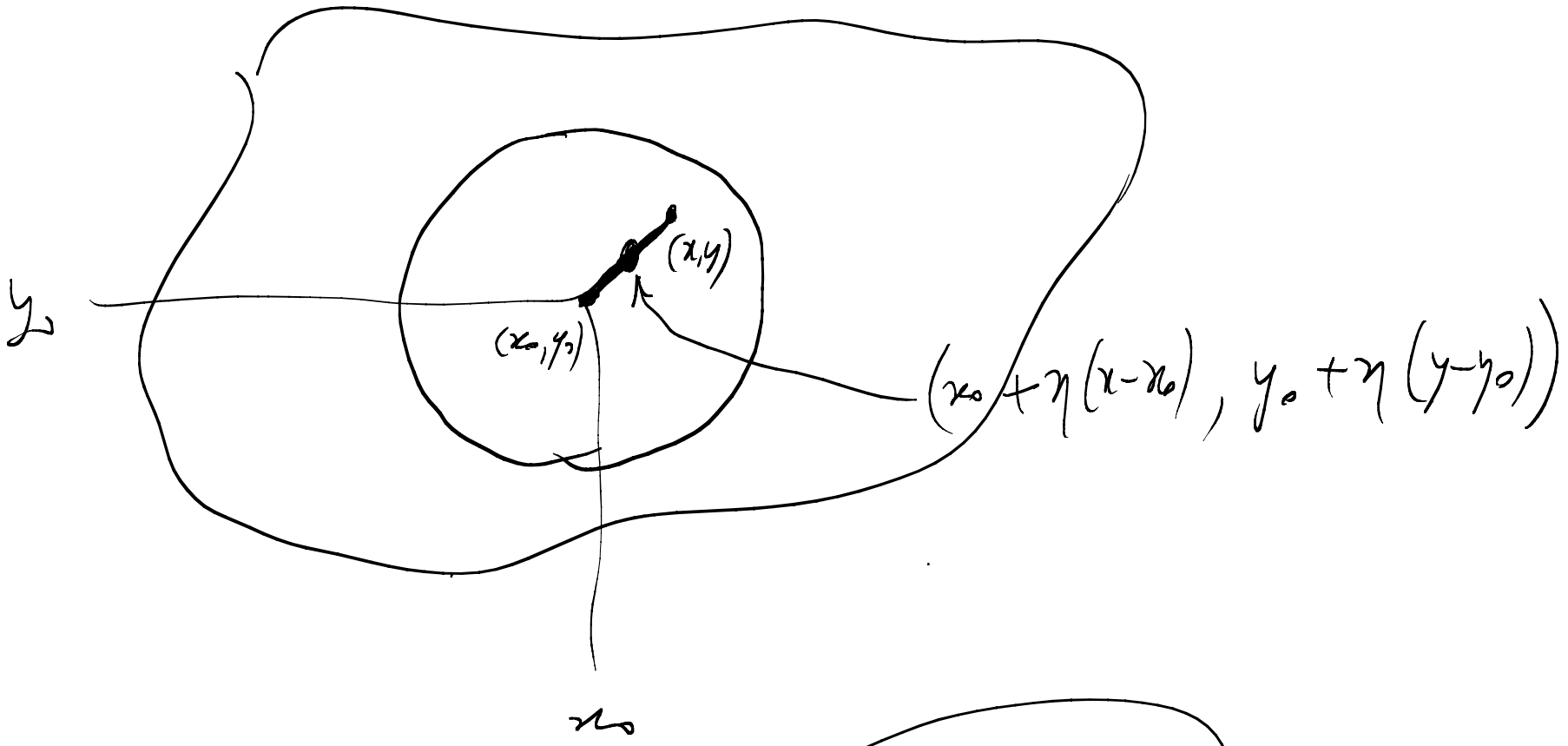
($f(x,\varphi(x)) \equiv 0$, $f(x_0,\varphi(x_0)) \equiv 0$)

$$f(x,\varphi(x)) \qquad \frac{d}{dx}\overbrace{f(x,\varphi(x))}^{\equiv 0} = 0$$

$$0 = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(\quad)\,\varphi'(x)$$

$$\therefore \varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y}(x,\varphi(x))$$

LEMMA $f \in C^1(B_\rho(x_0, y_0))$



$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0+\eta(x-x_0),\ y_0+\eta(y-y_0))(x-x_0) + f_y \quad (y-y_0)$$

$\longrightarrow h(t) = f\big(x_0 + t(x-x_0),\ y_0 + t(y-y_0)\big)$

h è composta di funzioni C^1 $\quad (x,y) \to f(x,y)$

$t \to$

$$h'(t) = \nabla f\big(x_0 + t(x-x_0),\ y_0 + t(y-y_0)\big) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

$$h(1) - h(0) = \nabla f\big(x_0 + \eta(x-x_0),\ y_0 + \eta(y-y_0)\big) \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]$$

$(x_0, \varphi(x_0))$ $(x, \varphi(x))$ tangente

y_0 y

X euclideo $\qquad A : X \to X$

A è autoaggiunto se e solo se $\quad \forall u, v \in X \quad A(u) \cdot v = u \cdot A(v)$

prodotto scalare

La somma di autospazi è diretta

$$A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \dots, A^{\lambda_k}$$

$u_i \in A^{\lambda_i}$, $\boxed{\sum_1^k u_i = 0} \Longrightarrow u_i = 0 \ \forall i = 1 \dots k$

tolti dalla somma $\sum_1^k u_i$ tutti i vettori nulli, se ce ne sono, restano solo autovettori di A, $u_{i_1} \dots u_{i_h}$ quali, essendo in autospazi distinti, sono INDIP

assumo, perché $\sum_{j=1}^{h} u_j = 0$ è una combinazione nulla a coeff. $\neq 0$ ($=1$) di vettori indip.

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$T : (x_1, \dots x_n) \to (y_1, \dots y_n)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ y_n - f_n(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

applico DINI

$$\curvearrowright g_i(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_n) = y_i - f_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_n = 0 \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(g_1 \dots g_n)}{\partial(x_1, \dots x_n)} \neq 0 \qquad \frac{\partial(g_1 \dots g_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = \frac{\partial(-f_1, \dots -f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$$

$A : X \to X$, X complesso di dim $< \infty$ $(\neq 0)$

$\boxed{\text{allora}}$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ $u \in X$: $\begin{cases} A(u) = \lambda u \\ u \neq 0 \end{cases}$

DIM. Si sceglie una base di X, $e_1 \dots e_n$, arbitraria

IDEA: usare le coordinate e la matrice associata.

$u = u_i e_i$ (u_i coordinate complesse di u rispetto alla base $e_1 \dots e_n$)

$u = 0 \Rightarrow u_i e_i = 0 \underset{\text{indip. di } e_1 \dots e_n}{\Rightarrow} u_i = 0 \ \forall i \Rightarrow$ siamo intuiti a vettori con coordinate non tutte nulle

$$\mathcal{A}(u) = A_{ij} u_j \, e_i$$

vettore di X

$$\underbrace{A_{ij} u_j \, e_i}_{\mathcal{A}(u)} = \underbrace{\lambda u_i e_i}_{\lambda u} \quad \text{in } X$$

$$\underbrace{\left[A_{ij} u_j - \lambda u_i\right]}_{\in \mathbb{C}} e_i \overset{X}{=} 0$$

combinazione lineare nulla di vettori indip. $e_1 \dots e_n$

$$\Updownarrow$$

in $\mathbb{C}^n \leftarrow A_{ij} u_j - \lambda u_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

cioè un sistema lineare omogeneo $n \times n$.

Il sistema ha soluzioni $(u_1 \dots u_n)$ non nulle

se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

(colonne sono dipendenti)

Usando lo sviluppo di Laplace $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio in λ e quindi, per il Th. di Gauss, l'equazione caratteristica $\det(A-\lambda I)=0$ ha soluzioni complesse.

detta allora $(\bar{u}_1 - \bar{u}_n)$ una soluzione non nulla del sistema

$$(A - \lambda I)u = 0$$

ne segue che $u = \bar{u}_i$ ei è un autovettore.

□

AL_7.1

$A : X \to Y$

$y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$

$\exists\, x_1, x_2 \in X$: $A(x_1) = y_1$

$A(x_2) = y_2$

$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = y_1 + y_2$

$\in X$ lin.

$y_1 + y_2$ è immagine di $x_1 + x_2$

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 2×2

$$\exists\, X \in \mathbb{R}^{3\times 2} : AX = B$$

$$A(X_1\ X_2) = (B_1\ B_2) \quad \begin{matrix} \rightarrow AX_1 = B_1 \\ \rightarrow AX_2 = B_2 \end{matrix}$$

$$A \mid B_1 B_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x_2	x_3		x_1
1	0	0	1
0	1	1	−1

x_2	x_3	x_1			
−1	1	2	1	−1	
0	(1)	1	1	1	
1	−1	−2	−1	1	I · (−1)
1	0	−1	0	2	I + II

x_1 parametro

$$x_2 = \underbrace{0 + 1x_1}_{} \quad \underbrace{2 + 1x_1'}_{}$$

$$x_3 = 1 - 1 \cdot x_1 \quad 1 - 1x_1'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_1 & 2 + x_1' \\ 1 - x_1 & 1 - x_1' \end{pmatrix} \quad \forall x_1, x_1'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_1 & 2+x_1' \\ 1-x_1 & 1-x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 1-x_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_1' \\ 0 & 2+x_1' \\ 0 & 1-x_1' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$$

per Gauss $\exists \lambda_1 : p(\lambda_1) = 0 \Rightarrow p(\lambda)$ è divisibile

per $(\lambda - \lambda_1)$ (Ruffini) $\quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\, p_1(\lambda)$

si procede allo stesso modo con $p_1(\lambda) \Rightarrow p_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) p_2(\lambda)$

$$\Downarrow$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) p_2(\lambda)$$

AL_7.6

$$\vdots$$

$$\boxed{p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)\, A}$$

SOLO IN $\mathbb{C}$

$$(A \circ B)(x) = B(A(x))$$

$$x \rightarrow (A \circ B \circ C)(x) = C(B(A(x)))$$

$A : X \to X$ $e_1 \dots e_n$ base e che

$\exists \lambda_i : A(e_i) = \lambda_i e_i$

NO EINSTEIN

Basta supporre come base $e_1 \dots e_n$

$A(e_j) = \lambda_j e_j \Rightarrow$ la j-esima colonna è

$\sim e_j \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \lambda_j \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$

la matrice associata è

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

X , Y sottosp. X allora

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

$$x = x_u + (x - x_u)$$

$x_u \parallel u$, $(x - x_u) \perp u$

AL_2.1

$$(x - x_u)\, u = x u - \left(\frac{xu}{|u|^2} u\right) u = x u - \frac{xu}{|u|^2} |u|^2 = 0$$

$$x = x_{\langle u_1 \dots u_n \rangle} + \underbrace{\left(x - x_{\langle u_1 \dots u_n \rangle}\right)}_{\in \langle u_1 \dots u_n \rangle^{\perp}}$$

$$\in \langle u_1 \dots u_n \rangle$$

$w \in Y \cap Y^{\perp}$ è ortogonale a stesso

$$w \cdot w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

$w \in Y$, $w \in Y^{\perp}$

$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle A_2, \dots, A_n \rangle \Rightarrow A_1 \in \langle A_2, \dots, A_n \rangle$

ogni vettore di $\langle A_1, A_2 \dots A_n \rangle$ appartiene a $\langle A_2, \dots, A_n \rangle$

in particolare lo fa A_1

AL_3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 2 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2$$

Formule di Cardano per proseguire

~~errore nel testo~~ impostato coi termini del vecchio esercizio