Note Title 1/19/2021

1) $\boxed{u_v = \frac{uv}{|v|^2} v}$ $\quad u - u_v \perp v$ th. proiezione

2) $x_{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$ con $\boxed{v_i v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ > 0 & i = j \end{cases} \quad v_1 .. v_k \text{ è un sistema ortogonale}}$

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{v_i}$$

grazie della proprietà $\boxed{x - x_{\langle v_1 .. v_k \rangle} \perp v_j}$ $\forall j = 1..k$

th. proiez.

3) $x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle}$ con $v_1 .. v_k$ vettori arbitrari

$= \boxed{\sum_1^k \alpha_i v_i}$ con α_i verificanti $\left[x - \sum_1^k \alpha_i v_i \right] v_j = 0$ $\forall j = 1..k$

Matrice associata ad $A: X \to Y$ e a due basi $e_1 \dots e_n$ di X e $e'_1 \dots e'_m$ di Y ($\exists$ dati sono A, $\{e_1 \dots e_n\}$, e $\{e'_1 \dots e'_m\}$) è la matrice M che verifica

$$\boxed{A(e_j) = M_{ij}\, e'_i} = \sum_{i=1}^{m} M_{ij}\, e'_i$$

$\in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{C})$

$\boxed{\text{AL\_6.2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A(x) &= A(x_j e_j) = x_j \underline{\underline{A(e_j)}} = \\ &= x_j M_{ij}\, e'_i = \left[M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]_i e'_i \end{aligned}}$$

X $\{e_1 \dots e_n\}$ $\{e'_1 \dots e'_n\}$ due basi di X

M (cambio di base)

$$\boxed{e'_j = M_{ij} e_i} = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} e_i$$

coefficienti

coordinate di e'_j rispetto a $e_1 \dots e_n$

$e'_j = M_{ij} e_i$ in $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

incognite

è un sistema lineare a termini noti multipli $e'_1 \dots e'_n$

$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\boxed{[M^*]_{ij} = \overline{M_{ji}}}$$

$$[M^T]_{ij} = M_{ji}$$

coincidono per le matrici reali

$$\boxed{A(x)y = x A(y)}$$

$\longrightarrow$ A è autoaggiunto se e solo se la sua matrice associata ad una base ortonormale qualunque coincide con la sua aggiunta

$$A^*_{ij} = \overline{A_{ji}} = A_{ij} \qquad \boxed{A = A^*}$$

<u>Th spettrale complesso</u> $A: X \to X$ autoaggiunto, X complesso di dimensione finita (non nulla).
Allora esiste una base <u>ortonormale</u> di X formata da autovettori di A. (<u>base spettrale di X</u>)

<u>DIM</u> per induzione sulla dimensione di X

$\boxed{\dim X = 1}$ Per il th. d'esistenza degli autovettori $\exists \lambda, v \in X : \boxed{A(v) = \lambda v, \ \underline{v \neq 0}}$

Per il teorema dei generatori $X = \langle v \rangle$ e $\left\{ \frac{v}{|v|} \right\}$ è la base ortonormale di autovettori per X.

$$\boxed{\text{Se la tesi è vera per gli spazi di dim } n \text{ è vera per quelli di dimensione } n+1, \quad n>0}$$

$\dim X = n+1$.

Come prima $\exists\, \lambda, v \in X$: $\begin{cases} A(v) = \lambda v \\ v \neq 0 \end{cases}$ $\qquad u = \dfrac{v}{|v|}$

$$W = \langle u \rangle^{\perp} = \{ w \in X : w u = 0 \}$$

Per la proprietà del complem. ortog.

$$X = \langle u \rangle \oplus W \Rightarrow n+1 = \dim X = \underbrace{\dim \langle u \rangle}_{=1} + \dim W$$

$$\Downarrow$$

$$\dim W = n$$

W è uno spazio complesso e inoltre $A : W \to W$, per il

Lemma III $\quad \left(A(w)u \underset{A \text{ autoagg.}}{=} w A(u) \underset{u \text{ autovett.}}{=} w(\lambda u) = \bar{\lambda} \underbrace{wu}_{=0 \text{ se } w \in W} \right.$

segue $\underline{\underline{A(w) \in W \text{ se } w \in W}}$

Per l'ipotesi induttiva $\exists$ $w_1 \dots w_n$ base di W formata da autovettori di A. Poiché $w_1 \dots w_n \in W$ sono tutti ortogonali ad u e quindi $u, w_1 \dots w_n$ è un sistema ortonormale di autovettori di A in X.

Ne segue che $u, w_1, \dots, w_n$ sono $n+1$ vettori linearmente indipendenti (perché ortogonali) e, per il th. dei generatori, sono una base di X, che è di dim $n+1$.

$\boxed{\text{AL-7.1}}$

Grassmann

$$\underbrace{\dim(X+Y)}_{n+m-k} + \underbrace{\dim(X\cap Y)}_{k} = \underbrace{\dim X}_{n} + \underbrace{\dim Y}_{m}$$

DIM. $\dim(X\cap Y) = k > 0$ $\quad k < \begin{matrix}\dim X \\ \dim Y\end{matrix}$

Sia $w_1 \dots w_k$ una base di $X\cap Y$

Siano $w_1 \dots w_k\, x_{k+1} \dots x_n$ una base per X $\quad \dim X = n$

e $w_1 \dots w_k\, y_{k+1} \dots y_m$ una base per Y, ottenuti $\quad \dim Y = m$

per completamento.

$\boxed{\text{Proviamo}}$ che $\{\overbrace{w_1 \dots w_k}^{k}, \overbrace{x_{k+1} \dots x_n}^{n-k}, \overbrace{y_{k+1} \dots y_m}^{m-k}\}$ è una base di $X+Y$ di $k+(n-k)+(m-k)$ elementi

Per ogni $x \in X$ $\exists$ $\alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_{k+1} \dots \beta_n$ tali che

$$x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j$$

Analogamente $\forall y \in Y$ $\exists \gamma_1 \dots \gamma_k, \delta_{k+1} \dots \delta_m$ tali che

$$y = \sum_1^k \gamma_i w_i + \sum_{h=k+1}^m \delta_h y_h$$

Ne segue che

$$x + y = \sum_1^k (\alpha_i + \gamma_i) w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j + \sum_{k+1}^m \delta_h y_h \in$$

$$\in \langle w_1 \dots w_k \, x_{k+1} \dots x_n \, y_{k+1} \dots y_m \rangle$$

Quindi $X + Y = \langle w_1 \dots - - - - - - - - - y_m \rangle$

Per provare l'indip. di $w_1 \dots w_k\ x_{k+1} \dots x_n\ y_{k+1} \dots y_m$ si considera

$$\underbrace{\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i}_{w} + \underbrace{\sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_{k+1}^{m} \gamma_k y_k}_{y} = 0$$

e si prova che $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ <u>sono tutti nulli</u>.

$$\overset{\in W}{w} + \overset{\in \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle}{x} + \overset{\in \langle y_{k+1} \dots y_m \rangle}{y} = 0 \Longrightarrow \underbrace{w + x}_{\in X} = \underbrace{-y}_{\in Y} \Rightarrow \underline{\underline{y \in X \cap Y}}$$

$$\underbrace{(w+y)}_{\langle w_1 \dots w_k \rangle = X \cap Y} + \underbrace{x}_{\langle x_{k+1} \dots x_n \rangle} = 0$$

Per il teorema di decomp. della base

$$X = \langle w_1 \dots w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle$$

da cui, per la def. di somma diretta, segue $\boxed{w+y=0}$ e $x=0$

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^{m} \gamma_j y_j = 0 \quad e \quad \sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j = 0$$

per l'indipendenza di $w_1 \dots w_k y_{k+1} \dots y_m$ segue $\alpha_i = 0 \ \forall i$, $\gamma_j = 0 \ \forall j$

e per quella di $x_{k+1} \dots x_n$ segue $\beta_j = 0 \ \forall j$, che dà

l'indip. di $w_1 \dots w_k x_{k+1} \dots x_n y_{k+1} \dots y_m$

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

$\exists\, A : \mathrm{dom} f \to \mathrm{cod} f$ **LINEARE** ~~tale che~~

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$

$df : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(t)$ $\quad \underline{\underline{x_0}} = \gamma(t_0)$ $\quad \langle \dot{\gamma}(t_0) \rangle$ spazio lineare tangente

$\psi(s) = \gamma(t_0) + s\,\dot{\gamma}(t_0)$ spazio affine tangente (retta tangente)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) \text{ esiste } = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

$\underline{x \neq 0}$ $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$

$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$