Note Title 1/5/2021

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

NON E' SIMMETRICA

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) - 3 - 2 -$$

$$-\left[(\lambda-1) - 3(1-\lambda) - 2(1+\lambda)\right] =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 1 - 5 + 1 + 3 + 2 =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \qquad \mu = 1$$

$\lambda_1 = 0$ $\mu(\lambda_1) = 0$ $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $\mu = 1$ $\lambda_3 \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

tre autovalori in $\mathbb{C}$ DISTINTI in $\mathbb{C}^3$

$\Rightarrow$ $A(u) = A_u$ $\quad u \in \mathbb{C}^3$

è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ (MA non in $\mathbb{R}$)

$\sigma(A) \not\subseteq \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccl} 0 & 2 & 1 & \text{II} + \text{I} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\text{III} - \text{I}} \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

m → equazioni

n → incognite

$A u \; ; \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Im ha dim 2 (# pivot)

Ker ha dim 1 (# non-pivot)

$\boxed{\text{AL\_1.1}}$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

$A(u) = Au$ $\quad A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

A è suriettiva se ha 3 pivot

A è iniettiva se ogni colonna è pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

4 vettori in $\mathbb{R}^3$ non possono essere indipendenti perché le colonne sono dipendenti

$$A : X \longrightarrow Y$$

$e_1 \dots e_n$ $\quad f_1 \dots f_m$

$e'_1 \dots e'_n$ basi $\quad f'_1 \dots f'_m$

M matrice di cambio di base da $\{e_1 \dots e_n\}$ a $\{e'_1 \dots e'_n\}$ in X

N la stessa da $\{f_1 \dots f_m\}$ a $\{f'_1 \dots f'_m\}$

→ A la matrice associata ad $\mathcal{A}$ e alle basi $\{e_1 \dots e_n\}$ e $\{f_1 \dots f_m\}$

A' la stessa ma con le basi nuove $e'_1 \dots e'_n$ $f'_1 \dots f'_m$

↓

Calcoliamo A'

$$\mathcal{A}(e'_j) = \mathcal{A}(M_{hj} e_h) \overset{\text{lin.}}{=} M_{hj} \mathcal{A}(e_h) = M_{hj} A_{kh} f_k = M_{hj} A_{kh} N^{-1}_{ik} f'_i$$

e'_j in cambio base

def. matrice associata

↑

$$N^{-1}_{ik} A_{kh} M_{hj} = (N^{-1} A M)_{ij}$$

AL_6.4

$$A(e_j') = (N^{-1} A M)_{ij} f_i'$$

$$N^{-1} A M = A'$$

$A(u) = u'$ $\qquad X = \langle \underset{e_1}{\sin t}, \underset{e_2}{\cos t}, \underset{e_3}{1}, \underset{e_4}{t} \rangle$

$A : X \to X$

(I) Calcolare la matrice associata ("La diagonalizz. importante" AL_7.8?)

$A(e_1) = \cos t = 0 \cdot \sin + 1 \cdot \cos t + 0 \cdot 1 + 0 \cdot t$

$A(e_2) = -\sin t$

$A(e_3) = 0$

$A(e_4) = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 (\lambda^2 + 1)$$

$\lambda = 0 \quad \mu = 2$

$\lambda = i \quad \mu = 1$

$\lambda = -i \quad \mu = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda = 0$

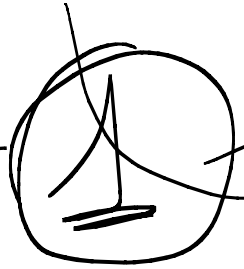
u_1	u_2	u_3	u_4
0	−1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1

$$\begin{cases} -u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}$$

Autospazio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

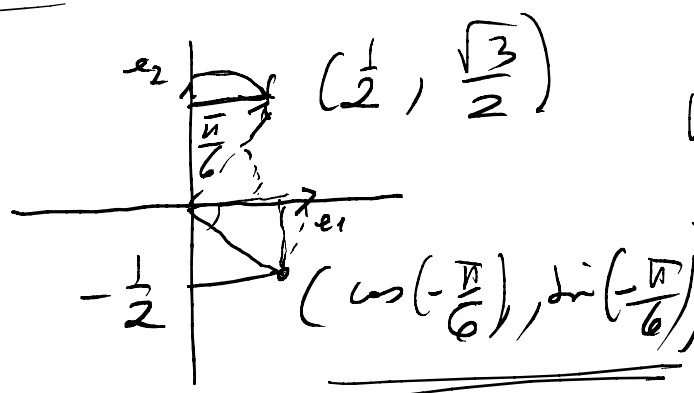
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



HA DIMENSIONE 1

$\frac{\pi}{6}$ in senso orario

$\mathbb{R}^2$



$A(x)$ il vettore x ruotato di $\pi/6$ in senso orario

$A(e_1)$ è la prima colonna della matrice associata

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$A(e_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$A(e_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left[x - \underbrace{\sum_{1}^{n} \alpha_i u_i}_{\text{proiezione}}\right] u_j = 0 \qquad \forall j = 1 \dots n}$$

Risolvere trovare α_i e calcolare

$$\boxed{\sum \alpha_i u_i}$$

Proiezione

$$\underbrace{x^3y - x}_{f(x,y)} = 1 \qquad \Gamma$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 1 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$f_y = 0 \iff x = 0$

$\Downarrow$

$f_x \neq 0$

Poiché il ∇f non è mai nullo su Γ vale che nell'intorno di OGNI suo punto una delle due variabili si può scrivere come funzione dell'altra.

$\neq \emptyset$ perché, posto $y=0$ si ricava $x=-1$ e quindi $(-1,0) \in \Gamma$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uguali

$f \in C^1(\Omega)$

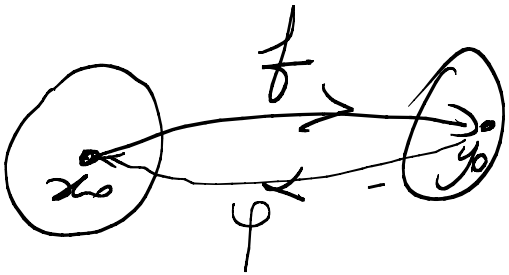
$\Omega \ni x_0$

$y_0 = f(x_0)$

$\det f'(x_0) \neq 0$ allora $\exists\, U$ intorno di y_0

$\exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}^n$:

$\forall y \in U \quad \exists\, \varphi(f(x)) = x$



$g(x,y) = y - f(x)$

$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)$

è vera in (x_0, y_0)

vistore la x in funzione della y

g_y = identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Th. funzione implicita IV

Corretto

$\det \dfrac{\partial(f_1 \cdots f_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(x_0) \neq 0$ (Pag 11 $S(y)$ invece di $S(x)$)

$\exists U, \varphi : \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $\boxed{g(\varphi(y), y) = 0}$

$\varphi(y) = x$

$$A(u) = \int_0^t u(s)\,ds$$

$\langle \underset{e_1}{\sin t}, \underset{e_2}{\cos t} \rangle = X$

$\langle 1, \cos t, \sin t \rangle = Y$

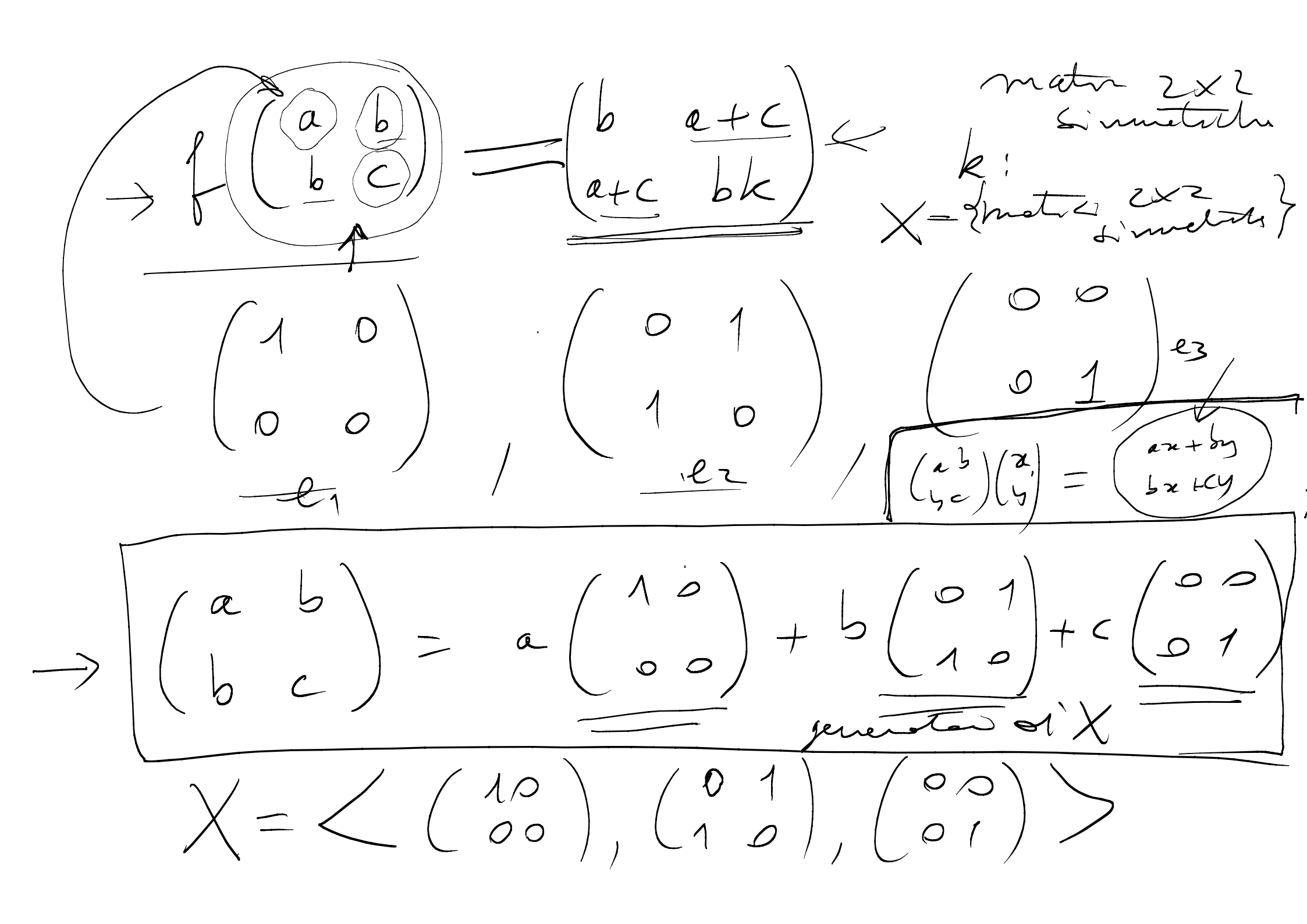
$e_1' \quad e_2' \quad e_3'$

$A : X \to Y$

$$A(e_1) = \int_0^t \sin s\,ds = -\cos s \Big|_0^t = -\cos t + 1 \quad (\cos 0)$$

$$A(e_2) = \int_0^t \cos s\,ds = \sin s \Big|_0^t = \sin t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+c \\ a+c & bk \end{pmatrix}$$

matrici 2x2 simmetriche

k:

$X = \{$matrici 2x2 simmetriche$\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e_3$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

generatori di X

$$X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$a=1 \quad b=c=0$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 \qquad\qquad e_2$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+c \\ a+c & bk \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} =$$

e_2

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 \qquad\qquad e_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_3 \qquad\qquad e_2$

I valori ottenuti vanno a costituire le basi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

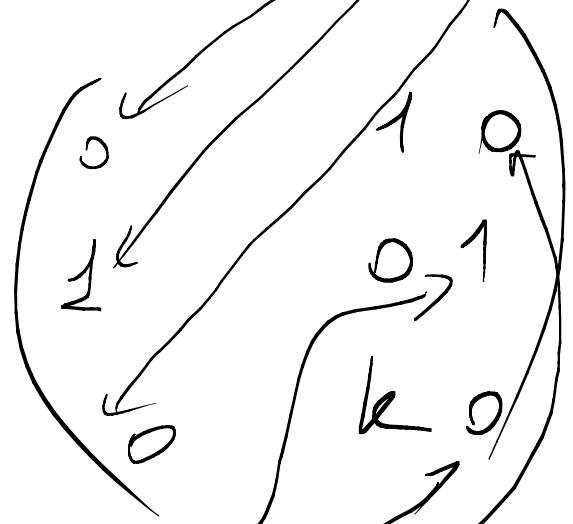
$$f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

e_1 $\qquad$ e_2

$$f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + k\, e_3$$

e_2

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$



$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & k & 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{AL\_6.2}}$ $\boxed{\text{AL\_7.9}}$ Matrice associata

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \text{ ha dim } 3$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$ è diagonale? (per quali k?)

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & k & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \left[-\lambda - \lambda k\right] =$$

$$= -\lambda^3 + (1+k)\lambda =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - (1+k))$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{1+k}$

$k = -1$

$\lambda =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad \boxed{1} \quad + \quad 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

due forme

l'autospazio ha dim 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La matrice non è diagon.

perché $\lambda = 0$ ha $\mu = 3$

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \boxed{\lambda = \pm i}$$

$A : X \to X$, X euclideo complesso di dimensione finita non nulla

A autoaggiunto

$\Rightarrow$ $\exists$ base spettrale ortonormale

$A : X \to X$ ammette il Th. esistenza di autovettori

$\exists\, v, \lambda$: $\boxed{A(v) = \lambda v \quad v \neq 0}$

$W = \langle v \rangle^{\perp}$ $\qquad X = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$

$\rightarrow \boxed{\dim X = \dim \langle v \rangle + \dim W}$

$\dim \langle v \rangle = 1$

$$\boxed{\dim W = \dim X - 1} > 0 \quad \text{se } \underline{\dim X > 1}$$

sapendo che la tesi è vera per gli spazi di dimensione $\dim X - 1$

$\exists$ base ortonormale di autovettori di A per W,

$v_1 \dots v_k$

sono ortogonali a

perché $\in W$.

Allora $\underbrace{v_1, \dots, v_k}$, $v/|v|$ è la base richiesta per X.

$x_1\ x_2\ \dots\ x_n$

$A_1\ A_2 \dots A_n \mid 0$

ha soluzione a componenti non tutte nulle

se e solo se

$A_1 - A_n$ sono dipendenti

$$\sum_{1}^{n} x_i A_i = 0$$

$$X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$$

$$A : X \to Y$$

$$A(X) = \{ A(x), \; x \in X \}$$

$$A(x) = A\left(\sum x_i u_i\right) = \sum x_i A(u_i)$$

$$\in \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$$

f

$$A(X) = \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$$

AL_5.6

$$\begin{cases} A(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases}$$

sapere usando una base di X

Scelta la base $u_1 \dots u_n$

si ha $\boxed{x = \sum_{1}^{n} x_i u_i} \Rightarrow$ indip. di $u_1 \dots u_n$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_i = 0 \ \forall i$

$$A(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_j u_i$$

$$\begin{cases} x_i \text{ non tutti nulli} \\ \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_j u_i = \lambda \sum_{i} x_i u_i \end{cases}$$

portando a I membro e raccogliendo u_i

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \lambda x_i \right) u_i = 0 \iff \text{indip di } u_i$$

$$\boxed{\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \lambda x_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \\ x_i \text{ non tutti nulli} \end{cases}}$$

ha soluzioni $(x_1 \dots x_n)$, x_i non tutti nulli

se e solo se le colonne sono dipendenti

cioè se $\det(A - \lambda I) = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

ha soluz. λ per th. Gauss

e

le soluzioni $(x_1 \dots x_n)$ del corrisp. sistema coordt.

producono gli autovettori $\boxed{\sum_1^n x_i u_i \in X}$