Note Title 12/29/2020

SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE

$$H(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO 2 in $\mathbb{R}^n$

Lo studio è immediato se a_{ij} è DIAGONALE

In tal caso $H(x) = \sum_{1}^{n} \lambda_i x_i^2$

$H(e_i) = \lambda_i$ i loro segno

$$(\min \lambda_i) \sum x_i^2 \le \sum \lambda_i x_i^2 \le (\max \lambda_i) \sum x_i^2 = \Lambda |x|^2$$

λ = $\min \lambda_i$

$$\lambda |x|^2 \le H(x) \le \Lambda |x|^2$$

DEFINITA

positiva $\lambda > 0$ $H(x) > 0$ $\forall x \neq 0$

negativa $\Lambda < 0$ $H(x) < 0$ $\forall x \neq 0$

$\lambda \geq 0$ $\Lambda > 0$ $H(x) \geq 0$ ci sono vettori non nulli in cui $H = 0$

forme

SEMIDEFINITE

$\Lambda = 0$ $\lambda < 0$

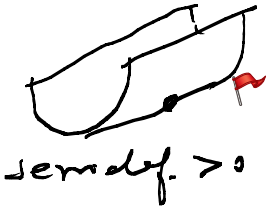
negativa.

$H(e_i) = \lambda_i$ ci dice com'è

$\lambda < 0$ $\Lambda > 0$ forma indefinita $\Rightarrow$ la forma cambia segno.

def. > 0

def. negativa



semidef. > 0

semid. < 0

indefinita

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{3} & \overset{z}{1} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ simetrica

$$H(x) = \boxed{x^2 + 3xy + xz + zx + 2y^2 + 3z^2}$$

xy	3
yx	0

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

$$b_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}) = b_{ij}$$

b è simmetrica

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum b_{ij} x_i x_j$$

$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = b_{ij} x_i x_j + b_{ji} x_i x_j$

$$H(x) = \sum a_{ij} x_i x_j =$$

$$= \sum a_{ij} M_{ih} x'_h M_{jk} x'_k =$$

$$= \underbrace{\left(M^*_{hi} a_{ij} M_{jk}\right)}_{(M^* A M)_{hk}} x'_h x'_k$$

$$\| \quad (M^{-1} A M)$$

M

$$x_i = M_{ih} x'_h$$

$M^* = M^{-1}$ se M è ortogonale

i termini della diagonale sono gli autovalori

$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4xz + 2y^2 - z^2$$

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

I) SIMMETRIZZIAMOLA

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})}$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2}(\quad)$$

$$x^2 \underbrace{-xy - yx}_{-2xy} + 2xz + 2zx + 2y^2 - z^2$$ SIMMETRICA

A) SEGNI DI CARTESIO

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-1) - \left(8-4\lambda \quad -1-\lambda\right) =$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 9$$ polinomio caratt.

AL_7.1

1) Se i coeff. sono tutti non nulli e concordi
Le radici (eventuali) sono tutte negative

2) Se i coeff. sono tutti non nulli ed a segni alterni
le radici sono tutte positive

Se $\lambda = 0$ è una radice, la forma è semidefinita
negativa se tutti i coeff. di grado $\leq k$
sono nulli e tutti quelli di grado $> k$ sono
non nulli con i segni concordi.

tem. def. > 0 se i coeff. sono tutti nulli per i gradi fino a k e non nulli a segni alterni per i gradi $> k$.

IN TUTTI I CASI RESTANTI ci sono radici d'segno discorde.

NELL'ESEMPIO i coeff. (tutti non nulli) non sono né concordi né a segni alterni.

$\Rightarrow$ radici discordi

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$a_i > 0 \ \forall i$

$a_i < 0 \ \forall i$

SYLVESTER

B

Segue bene

$M^* A M$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SIMMETRICA

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

riga $II + I$ →

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

colonna $2^a + 1^a$ →

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix}$$

$III - 2I$ →

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{matrix}$$

$3^a - 2 \cdot 1^a$ →

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{matrix}$$

simmetrica

$III - 2II$ →

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}$$

$3^a - 2 \cdot 2^b$ →

$$\begin{matrix} (1) & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 0 \\ 0 & 0 & (-9) \end{matrix}$$

segni discordi

forma indefinita

$$H(x) = 2x^2 - y^2 - zy$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonale

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

$\downarrow$ III $-\frac{1}{2}$ II

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (2) & 0 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4}) \end{matrix}$$

polinomio caratt. $=$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) -$$

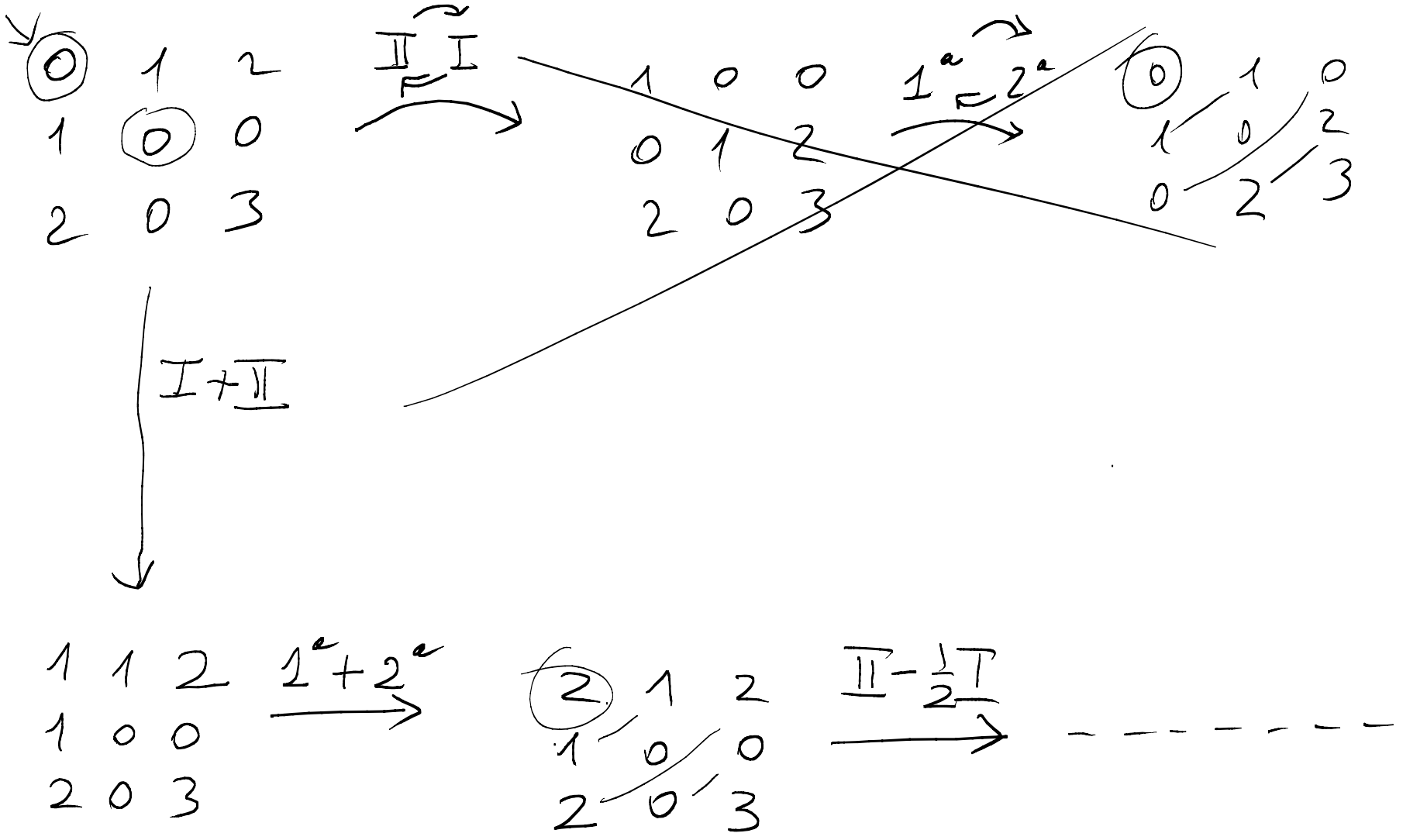
$$- \left((2-\lambda)\frac{1}{4}\right) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda - \frac{1}{2}$$

INDEFINITA


II ↔ I
1ª ↔ 2ª
I + II
1ª + 2ª
II − ½ I

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 3 -$$

$$-(6 - 3\lambda + \lambda - 3) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(3-\lambda) - 3$$

$$- 6 + 2\lambda + 3 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) =$$

$$= -\lambda(\lambda - 3)^2$$

$\lambda = 0 \quad \mu = 1$

$\lambda = 3 \quad \mu = 2$

$A - 3I$

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 \end{matrix} \quad \text{II} + 2\text{I}$$

due pivot

autospazio di dim 2

$$\dim A^3 = 2$$

A

x_1	x_2	x_3	
①	2	0	0
−1	0	−2	0
−1	1	−3	0
0	2	−2	II + I
0	①	−1	II/2
0	3	−3	III + I
0	1	−1	III/3
			III − II

$Ax = 0$

1 2 0	I
0 ① −1	II
① 0 2	I − 2II

$x_1 = -2x_3$

$x_2 = x_3$

$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

portando a DX meglio x_3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A(u) = u' - 2u$ $\quad \{\underset{e_1}{\sin t}, \underset{e_2}{\cos t}\}$ $\quad X = \langle \sin t, \cos t \rangle$

$A(e_1) = (\sin t)' - 2\sin t = \underset{e_2}{\cos t} - 2\underset{e_1}{\sin t}$

$A(e_2) = (\cos t)' - 2\cos t = -\sin t - 2\cos t$

$A : X \to X$

lezione 6
AL_6.2/6.4

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

↓

coordn. di $A(e_1)$ rispetto a e_1 ed e_2

polinomio caratt.

$(-2-\lambda)^2 + 1$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 =$

autov. $2 \pm \sqrt{4-5} =$

$\left(\underline{2-i}, \underline{2+i} \right)$

AL_7.8/7.9 dicembre

Th - $\underbrace{\dim A^\lambda}_{\substack{\text{dim. dello} \\ \text{autospazio} \\ \text{relativo a } \lambda}} \leq \mu(\lambda) =$ molteplicità dell'autovalore λ nell'eq. caratteristica

$u_1 \dots u_k$ sia una base di A^λ (della restrizione)

$u_1 \dots u_k \, v_{k+1} \dots v_n$ base di X (completata)

$\Rightarrow \underline{A(u_i) = \lambda u_i} \quad \forall i = 1 \dots k$ perché sono autovettori

ha segno che $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda & & 0 & B \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ \hline & 0 & & 0 & C \end{pmatrix}$ $\phi(\alpha)$ polinomio caratteristico rispetto alla base scelta.

natura assoluta della base $u_1 \dots u_k v_{k+1} \dots v_n$

$$p(\alpha) = \det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda-\alpha & & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & B \\ 0 & \vdots & & \lambda-\alpha & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & C-\alpha I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \quad (k)$$

$$= \det(A-\alpha I)$$

$$= (\lambda-\alpha)^k \det(C-\alpha I)$$

ha la radice $\alpha = \lambda$ con molteplicità almeno k

AL_7.6

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ base in $\mathbb{R}^2$

e_1, e_2 $\quad e'_1, e'_2$

$e_1 \quad e_2$

$e'_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$e'_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$e_1 \qquad e_2$

$M = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$

1	1	2	1
0	1	1	2
1	0	1	−1
0	1	1	2

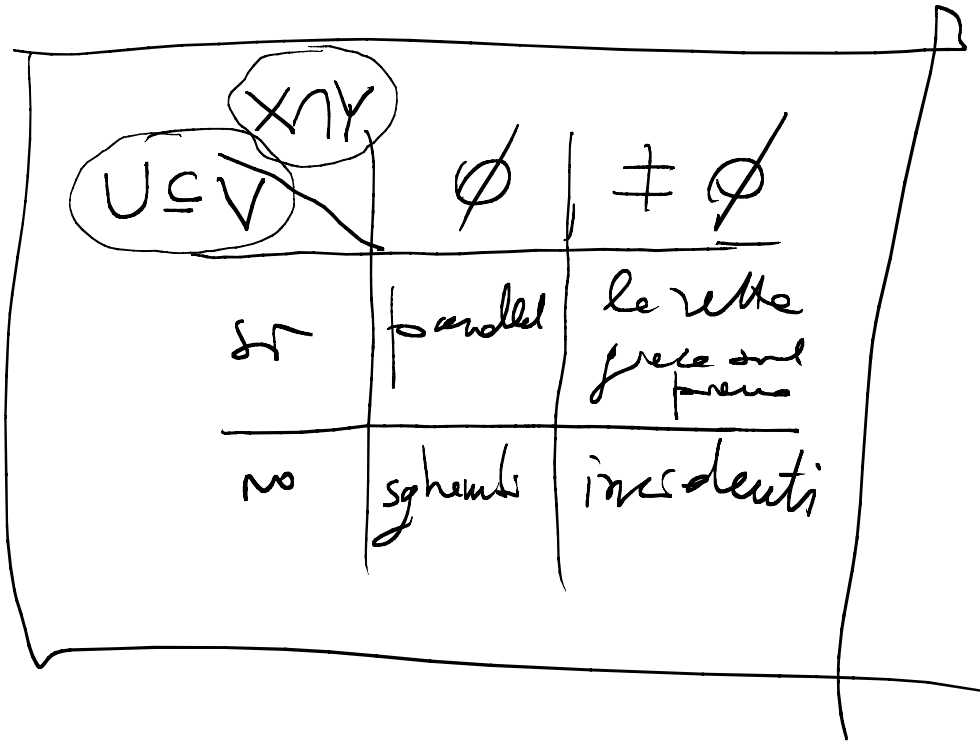
I − II

M

AL_6.2/6.4

$X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = U \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$X \cap Y$ da calcolare (sapere se è vuoto oppure no)



$A(u) = u' - u$ $\quad (1, t)$ $\quad X = \langle 1, t \rangle$

$e_1 \; e_2$

$A(e_1) = -1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot t$

$A(e_2) = 1 - t = 1 \cdot 1 - 1 \cdot t$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2$$

$\boxed{\lambda = -1}$

$\boxed{\mu = 2}$

u_1	u_2	
0	1	0
0	0	0

$u_2 = 0$

$u_1 =$ arbitrario

Autospazio è

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

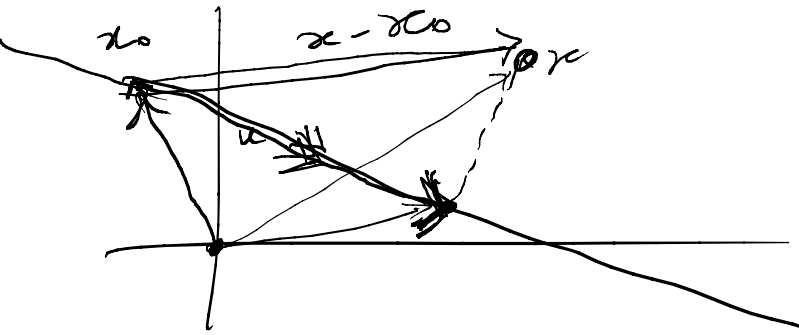
$A - (-1)\mathbb{I}$

AL_7.9

ha dim $1 < \mu(-1) = 2$, non è diag.

$(1,i) + \langle (1,-i) \rangle$ recta afín de $(1,1)$

x_0 u x



$x_0 + tu \quad t \in \mathbb{C}$

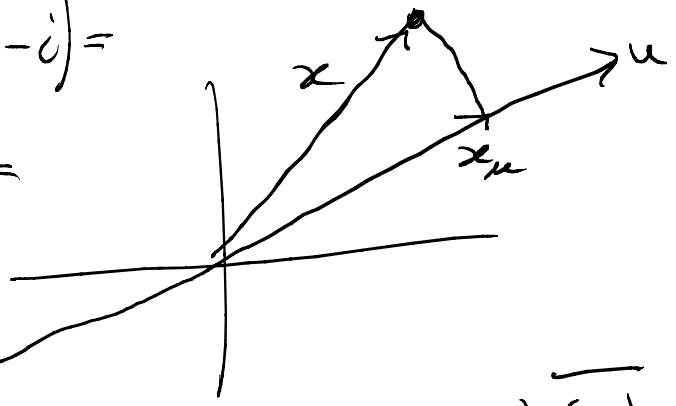
$x_0 + (x - x_0)_u$

$|u|^2 = (1,-i)(1,-i) =$

$= 1 \cdot \overline{1} + (-i)\overline{(-i)} =$

$= 1 + (-i)i = 2$

$|u| = \sqrt{2}$



$(0,1-i)(1,-i) = 0 \cdot \overline{1} + (1-i)\overline{(-i)} =$

$= (1-i)(i) = \underline{i+1}$

$(1,i) + \dfrac{\overbrace{[(1-1,\,1-i)]}^{x-x_0}\, u}{|u|^2}\, u$

$\dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}}\,(1,-i)$

retta ortogonale al piano $2x+y-z=3$

$(1,1,3)$

Un vettore ortogonale al piano

$\bar{v}\ (2,1,-1)$

la retta cercata è $(1,1,3)+t(2,1,-1)$

G_1.3

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad A(x) = Ax$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m linhas, n colunas)

$x \in \mathbb{R}^n$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4$

$$Ax = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$$

$A(e_1) = A_1 \quad A(e_3) = A_3 \qquad \operatorname{Im} A = \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$

$A(e_2) = A_2 \quad A(e_4) = A_4$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 5 & 3 \quad \text{II}+\text{I} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \quad \text{III}-2\text{I} \end{array}$$

$3^a \rightleftarrows 4^a$

x_1	x_2	x_4	x_3
(1)	1	1	2
0	(2)	3	5
0	0	0	(-4)

$\wedge \quad \wedge \quad \wedge$

base di $A(\mathbb{R}^4)$ è

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

I II IV colonne fonda

$\{x : Ax = 0\} = \ker A$

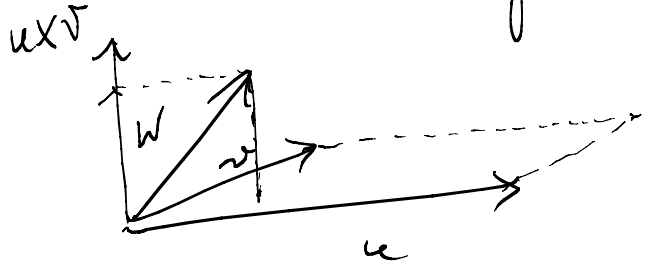
x_1	x_2	x_4	x_3
①	1	1	2
0	②	3	5
0	0	0	⑤

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	2	-1	
0	2	5	-3	
0	0	-4	0	
0	0	①	0	III / (-4)
0	2	0	-3	II − 5 III
0	①	0	$-\frac{3}{2}$	II / 2
1	0	0	$\frac{1}{2}$	I − II − 2 III

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_4 \\ -\frac{3}{2} x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AL_1.1
II parte.

Volume di un parallelepipedo



in $\mathbb{R}^3$

area di base è

$$|u \times v|$$

L'altezza

$$W_{u \times v}$$

$$\text{Vol} \left| w (u \times v) \right|$$

$$\left| \frac{w(u \times v)}{|u \times v|^2} u \times v \right| |u \times v| = \left| w (u \times v) \right|$$

prodotto triplo scalare

Defin. $\Rightarrow$ th. della ricorsione

Def. $\Rightarrow$ th. della ricorsione

~~Def.~~

Def

ES.