Note Title 12/19/2020

"Autovettori in autospazi distinti sono indipendenti

relativi ad autovalori distinti

COROLLARIO Se $A : X \to X$ possiede n autovalori distinti ($n = \dim X$) allora A è diagonalizzabile

DIM. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ autovalori a due a due distinti.

$\forall i = 1 \dots n \quad \exists u_i \in X : A(u_i) = \lambda_i u_i \quad u_i \neq 0$

NO EINSTEIN

$u_1 \dots u_n$ autovettori relativi ad autovalori distinti — quindi indipendenti. Sono una base di X per il th. elementare.

NOTA: 0 è un autovalore di A se $\exists x \neq 0 : A(x) = \underbrace{0}_{\lambda} \cdot x = 0$

0 è autovalore di A se $\ker A \neq \{0\}$

Th | La somma di autospazi è diretta

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ autovalori di A $\quad A^{\lambda_1} \dots A^{\lambda_k}$ relativi autospazi.

$\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

$u_1 \in A^{\lambda_1} \dots u_i \in A^{\lambda_i} \dots u_k \in A^{\lambda_k}$

$u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots + u_k = 0 \Rightarrow u_i = 0 \ \forall i$

Per assurdo $\exists u_{i_1}, u_{i_2} \dots u_{i_h} \neq 0$ $\quad u_{i_1} \in A^{\lambda_{i_1}}, \dots, u_{i_h} \in A^{\lambda_{i_h}}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{h} u_{i_j} = 0$ $\quad (*)$

u_{i_j} autovalori in autospazi distinti

ASSURDO perché $u_{i_1} \dots u_{i_h}$ sono indipendenti in quanto autovettori in autospazi distinti.

(*) è una loro combinazione nulla a coeff. tutti 1, non nulli

---

Th CNS perché A sia diagonalizzabile è che

$$\sum_{\lambda_j \in \sigma(A)} \dim A^{\lambda_i} = \dim X$$

$\sigma(A)$ = spettro di A = l'insieme degli autovalori di A

Base spettrale di V = base formata da autovettori di A

$\dim A^{\lambda_i} \leq \dim X$

Th. esistenza di autovettori (th. degli spazi invariati)

1) Sia $A : X \to X$ (X è uno spazio invariante per A), con

2) X spazio COMPLESSO (scalari ∈ $\mathbb{C}$). $\quad \dim X > 0$, $\dim X < \infty$

Ts Allora $\exists\, u \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $A(u) = \lambda u$

(Esistono autovettore e autovalori)

DIM. Sia $u_1 \dots u_n$ base di X, arbitraria.

EINSTEIN Σ

$x = x_i u_i \qquad A(x) = x_i A(u_i) = x_i A_{ji} u_j$

$x \neq 0 \iff$ qualche $x_i \neq 0$ perché $x_i u_i = 0$, per l'indip. di u_i vale $x_i = 0$ $\forall i$.

$$\begin{cases} A(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overbrace{x_i A_{ji} u_j}^{A(x)} = \overbrace{\lambda x_j \cdot u_j}^{\lambda x} \\ x_i \text{ non tutti nulli} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left[A_{ji} x_i - \lambda x_j\right] u_j = 0}_{\sum_j \sum_i \qquad (**)}$$

(**) è una combinazione nulla di vettori indipendenti $(u_1 \dots u_n)$, da cui

$$\left[A_{ji} x_i - \lambda x_j \right] = 0 \quad \forall j = 1..n$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & \cdots & & x_n \end{array} & \\
\begin{array}{c} j=1 \\ \\ \\ j=n \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\lambda \end{array} \right) & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\
 & (A - \lambda I) &
\end{array}$$

A possiede autovalori se esistono soluzioni non nulle del sistema precedente

Ciò accade se $\det(A-\lambda I)=0$ ← equazione caratteristica di A

e le sue soluzioni in $\mathbb{C}$ sono gli autovalori di A

per ogni λ autovalore di A si determina la soluzione non nulla del sistema degli autovettori

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

e la somma di tali soluzioni $x = \sum_1^n x_i u_i$ è un autovettore di A in X

perché $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio in λ

e Th. Ogni polinomio in $\mathbb{C}$ ha soluzioni $p(\lambda)=0$

ne segue che, in $\mathbb{C}$, esistono autovalori e autovettori

(Th. fondamentale dell'Algebra).

λ^2+1 $\quad A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2+1$$

$\rightarrow X = \langle \sinh t, \cosh t \rangle$

$A : X \rightarrow X \qquad A(u) = u'$

$(\sinh t)' = \cosh t$

$(\cosh t)' = \sinh t$

$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

La derivata prima muta X in sé.

BASE DI X

$u_1 = \sinh t \qquad u_2 = \cosh t$

$x = x_1 \sinh t + x_2 \cosh t$

$\in \langle \sinh t, \cosh t \rangle$

MATRICE ASSOCIATA ad A

$A(u_1) = (\sinh t)' = \cosh t = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$

$A(u_2) = (\cosh t)' = \sinh t = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

EQUAZ. CARATTERIST. di A, NON A.

AUTOVALORI = I due autovalori distinti sono $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$

$\lambda = 1$

$$(A - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$-x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = x_2$

x_1	x_2	
-1	1	0
1	-1	0

$\lambda = 1$ $\qquad II = -I$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ autospazio di $\lambda = 1$

$\lambda = -1$

il sistema cambia.

x_1	x_2	
1	1	0
1	1	0

$x_1 + x_2 = 0$

CALCOLO DEGLI AUTOSPAZI $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ autospazio di $\lambda = -1$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 1 \cdot \sinh t + 1 \cdot \cosh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} =$

si passa dalle coordinate degli autovettori in X agli autovettori stessi. $= \boxed{e^t}$

coordinate di

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{coordin.}} -1 \cdot \sinh t + 1 \cdot \cosh t = \frac{e^{-t} - e^t}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} =$

$= \boxed{e^{-t}}$

La base spettrale dello spazio delle soluzioni in $\langle \sinh t, \cosh t \rangle$

$= \{ \underbrace{e^t}_{v_1}, \underbrace{e^{-t}}_{v_2} \}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e^t$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e^{-t}$

$A(v_1) = (e^t)' = e^t = 1 \cdot e^t \rightarrow \boxed{u' = \lambda u}$

$A(v_1) \quad \lambda = 1 \quad v_1$

$\boxed{e^{\lambda t}}$

$$\begin{cases} A(u) = \lambda u \\ u \neq 0 \end{cases}$$

$$A(\alpha u) = \alpha A(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$$

$$\boxed{\alpha u \in A^{\lambda}}$$

$\det(M^{-1}AM - \lambda I) = \det M^{-1}(A - \lambda I)M =$ (Binet)

- $M^{-1}AM$: matrice associata a A rispetto ad una base (cambio ad un'altra base)
- $M^{-1}\lambda I M$: $\lambda M^{-1}M = \lambda I$
- $\det(A - \lambda I)$: INVARIANZA DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$= \det M^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \det M = \det(A - \lambda I) \cdot \det(M^{-1}M)$ (Binet)

$\det I = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$ polinomio con zeri in $\mathbb{C}$

è diag. in $\mathbb{C}$ perché ha 2 autovalori distinti

$\boxed{(A - \lambda I)u = 0}$ ha soluzioni non nulle se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$

$p(z_1) = 0$ allora $p(t)$ è divisibile per $(t - z_1)$

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1}(\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{\alpha_k}$$

α_i è la molteplicità di λ_i

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2$$

molteplicità di $\lambda = 0$

$\lambda = 0$, $\mu(\lambda) = 2$

Th. λ è un autovalore di A e μ è la sua molteplicità nell'equaz. caratteristica

allora $\dim V^\lambda \leq \mu(\lambda)$

DIM

Sia $u_1 \dots u_k$ una base di A^α e sia

$u_1 \dots u_k \, v_{k+1} \dots v_n$ un completamento ad una base di X.

Calcoliamo la matrice associata ad A ed alla base così costruita

$$A(u_1) = \alpha u_1$$

$$A(u_2) = \alpha u_2$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & k \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \vdots & \\ 0 & \alpha & \vdots & B \\ 0 & 0 & \vdots & \\ 0 \cdots & 0 \cdots & \alpha & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & C \end{array}\right) \end{array} = A$$

$$0 = \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{polinomio caratteristico}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & k \text{ colonne} & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc|c} \alpha-\lambda & 0 & & 0 & \\ 0 & \alpha-\lambda & & 0 & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha-\lambda & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & C-\lambda I \end{array}\right| \end{array} \underset{\text{Laplace}}{=}$$

$= \overbrace{(\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)\cdots(\alpha-\lambda)}^{k \text{ volte}} |C-\lambda I| =$

$(\alpha-\lambda)^k |C-\lambda I| \Rightarrow$ la molteplicità è almeno k

k fattori uguali — non è detto che non si annulli in $\lambda=\alpha$

$\Longrightarrow$

CNS perché A sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ è che $\dim A^\lambda = \mu(\lambda) \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

CNS perché A sia diagonalizz. su $\mathbb{R}$ è che $\dim A^\lambda = \mu(\lambda) \ \forall \lambda \in \sigma(A)$ + $\boxed{\Sigma \mu(\lambda) = \dim X}$

OPERATORI AUTOAGGIUNTI

X spazio euclideo complesso di dimensione finita non nulla.

$A : X \to X$ si dirà AUTOAGGIUNTO se accade che $\forall\, u, v \in X$

$$A(u)\, v = u\, A(v)$$

LEMMA I Se A è autoaggiunto su X allora gli suoi autovalori sono reali.

DIM. Sia λ l'autovalore della tesi e sia u un suo autovettore qualsiasi. Allora

$$A(u)\,u = (\lambda u)\,u = \lambda(uu) = \lambda |u|^2$$

($A(u)\,u = (\lambda u)\,u$: u autovettore)

($A(u)\,u = u\,A(u)$: A autoaggiunta)

$$u\,A(u) = u\,(\lambda u) = \overline{\lambda}(uu) = \overline{\lambda}\,|u|^2$$

$$\lambda |u|^2 = \overline{\lambda} |u|^2$$

Poiché $|u| \neq 0$ perché u è autovettore, dividendo per $|u|^2$ si ha $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$ ☐

LEMMA II Siano u e v due autovettori relativi ad autovalori distinti. (A autoaggiunta)

Allora u e v sono ortogonali ($uv=0$)

DIM. $u, v \neq 0$ $\quad A(u) = \lambda u \quad \lambda \neq \mu$

$A(v) = \mu v$

$$A(u)v = (\lambda u)v = \lambda(uv)$$

A autoaggiunta $\Rightarrow$

$$uA(v) = u(\mu v) = \bar{\mu}\, uv = \mu\, uv$$

(μ è reale (Lemma I))

$$(\lambda - \mu)(uv) = 0 \Rightarrow \boxed{uv = 0}$$

$\neq 0$ ipotesi

TS

LEMMA III u sia autovettore di A autoaggiunta.

Allora se $Wu = 0 \Rightarrow A(W)u = 0$

OSS $W = \langle u \rangle^{\perp} \Rightarrow A : W \to W$

Dim. $A(W)u = Wu A(u) = W(\lambda u) = \lambda \underbrace{Wu}_{0} = 0$

(λ autovalore di u)

($A = A^*$ autoagg.)

Th. spettrale complesso X spazio euclideo complesso, $\dim X < \infty$, $\dim X > 0$. $A : X \to X$ è autoaggiunta

Allora esiste una base ortonormale di X costituita da autovettori di A.

DIM. $\dim X = 1$

$A : X \to X$ complesso $\dim X > 0$

$\exists u_1$ autovettore di A, e pongo $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$

Poiché $\dim X = 1 \Rightarrow X = \langle v_1 \rangle$ e $\{v_1\}$ è la base ortonormale voluta.

Supponiamo il th. vero per gli spazi di dimensione k e proviamolo per quelli di dim. $k+1$: $\dim X = k+1$.

$A : X \to X$ $\exists u$ autovettore di A. $v = \frac{u}{|u|}$

Sia $W = \langle v \rangle^{\perp}$ | $X = \langle v \rangle \oplus \underbrace{\langle v \rangle^{\perp}}_{W}$

$\dim W = k$ $\Longleftarrow$ $\dim \langle v \rangle + \dim W = \dim X = k+1$

Per l'ipotesi induttiva il Th. è vero per W poiché si verifica che $A : \bar{W} \to \bar{W}$

$w \in W \Leftrightarrow wu = 0 \xrightarrow[\text{Lemma III}]{} A(w)u = 0 \Rightarrow A(w) \in \bar{W}$

$\exists\, v_1, v_2, \dots, v_k$ autovettori base di $\bar{W}$

$\underbrace{v_1 \dots v_k \, v}_{\text{ortonormale}}$

$v \perp v_1, v_2, \dots, v_k$ perché essi $\in W = \langle v \rangle^\perp$

$|v| = 1$

v è un autovettore di A

$k+1$ autovettori ortonormali in X e quindi indipendenti che, per il th. generatori, generano X e sono la base richiesta.

$\boxed{\text{AL\_7.1}}$

$\Rightarrow$ Ogni operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo complesso di dimensione finita non nulla è diagonalizzabile (con base spettrale ortonormale)

Th. $A : X \to X$ è autoaggiunto se e solo se la sua matrice associata ad una **base ortonormale** qualsiasi di X è autoaggiunta.

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}} \qquad \boxed{\mathbb{C}^{n\times n}} \left(A_{ij} = A_{ji} \text{ se } A \text{ è } \mathbb{R}^{n\times n} \right)$$

$$A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \qquad A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -1 & 2+3i \\ 1+i & 2-3i & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizz. su $\mathbb{R}$ perché tutti gli autovalori sono reali.

u

matrice associata ad A rispetto alla base canonica

matrice autoaggiunta

Th. spettrale reale se $\mathcal{A}(u) = Au$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\boxed{A_{ij} = A_{ji}}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

allora $\exists$ base ortonormale reale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $\mathcal{A}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \boxed{\sum b_{ij} x_i x_j} = \boxed{\sum (\text{autovalori}_i)\, x_i'^2}$$

ove

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

simmetrica