Note Title 12/18/2020

$H(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$

$(x_1, \dots, x_n)$

$H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$|x|^2 = \sum x_i^2$

se (a_{ij}) matrice diagonale

$$H(x) = \sum_1^n \lambda_i x_i^2$$

SEGNO di $H(x)$

$\lambda = \min_{1..n} \lambda_i$ $\quad \Lambda = \max_{1..n} \lambda_i$

$$\lambda \sum x_i^2 = \sum_1^n \lambda x_i^2 \le H(x) \le \sum_1^n \Lambda x_i^2 = \Lambda \sum x_i^2 = \Lambda |x|^2$$

$\lambda |x|^2$

$\lambda \le \lambda_i$ $\quad \Lambda \ge \lambda_i$

$x_i^2 \ge 0$

$$\lambda |x|^2 \le H(x) \le \Lambda |x|^2$$

$(\nexists)$

1) Se $\lambda > 0$ da (*) segue $H(x) > 0$ se $x \neq 0$
$H(0) = 0$

H DEFINITA POSITIVA

2) Se $\Lambda < 0$ da (*) si ha $H(x) < 0$ se $x \neq 0$ e $H(0) = 0$

H DEFINITA NEGATIVA.

3) $\lambda = 0$ $H(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ SEMIDEFINITA POSITIVA

4) $\Lambda = 0$ $H(x) \leq 0$ $\forall x \in X$ SEMIDEFINITA NEGATIVA

5) $\lambda < 0$ e $\Lambda > 0$ H si dice INDEFINITA

$H(e_i) = \lambda_i$ e_i base canonica

H assume valori discordi e_i ed e_j, ove $\lambda_i = \lambda$ e $\lambda_j = \Lambda$

$A : X \to X$ (operatore su X, endomorfismo)

$\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) scalare si dirà AUTOVALORE

se $\exists\, u \in X$ (vettore) tale che

$$\begin{cases} \boxed{Au = \lambda u} \\ u \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

tutte le soluzioni u di $(*)$ si dicono AUTOVETTORI

L'insieme degli autovalori si dirà SPETTRO

L'insieme degli autovettori relativi a λ, autovalore, più lo 0

si dice AUTOSPAZIO di λ, denotato con V_A^λ

Osservazione: $V_A^\lambda = \{ \text{soluzioni di } A(u) = \lambda u \}$

Osservazione $V_A^\lambda = \ker(A - \lambda I)$.

$$0 = (A - \lambda I)u = A(u) - \lambda u \Rightarrow \underline{A(u) = \lambda u}$$

$A : X \to X$ si dice DIAGONALE rispetto ad una base $u_1 \dots u_n$ di X se la sua matrice associata relativa a tale base è diagonale

$A: X \to X$ si dice DIAGONALIZZABILE $\frac{\dim X > 0}{\dim X < \infty}$

se $\exists$ $u_1 \dots u_n$ base di X rispetto a cui A è diagonale.

CNS perché A sia diagonalizzabile su X è che

X possieda una base formata da autovettori di A.

base spettrale di A.

DIM A diagonalizzabile $\Longrightarrow$ X ha una base spettrale

$\exists$ $u_1 \dots u_n$ base di X : $\boxed{A(u_i) = A_{ji} u_j}$ $\quad \boxed{A_{ji} = \begin{cases} \lambda_i & j=i \\ 0 & \text{altrim} \end{cases}}$

base di partenza — base d'arrivo

$$\begin{cases} A(u_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} u_j = \boxed{A_{ii}} u_i \\ u_i \neq 0 \text{ perché } \dots \end{cases}$$

i in una base

l'unico termine che può essere non nullo

$\Longrightarrow$ uguali

$\lambda_i = A_{ii}$

$$\begin{cases} A(u_i) = \lambda_i u_i \\ u_i \neq 0 \end{cases}$$

$u_1 \dots u_n$ base di X formata da autovettori di A

Calcoliamo la matrice associata alla base $\{u_1 \dots u_n\}$

$$A(u_i) = A_{ji} u_j \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ji} u_j = \lambda_i u_i$$

(non ci sono sommatore)

NO EINSTEIN

$$A(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$A_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \lambda_i & j = i \end{cases}$$

l'unico termine potenzialmente $\neq 0$ è il coeff. di u_i

$\Rightarrow A$ è diagonale

La ricetta per diagonalizzare è trovare una base di autovettori.

$$A(u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$A(u) = \lambda u$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : A(u) = \lambda u \quad u \neq 0 \; ?$$

$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

$u \in \mathbb{R}^2$ $\quad 2\times 2 \quad 2\times 1$

$u_2 - \lambda u_1 = 0$

$-u_1 - \lambda u_2 = 0$

$Au \quad -\lambda u$

$$\begin{cases} u_2 = \lambda u_1 \\ u_1 = -\lambda u_2 \end{cases}$$

$$u_2 = \lambda(-\lambda u_2) = -\lambda^2 u_2$$

$$u_2(1+\lambda^2) = 0$$

sost. I

$u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oppure $\boxed{(1+\lambda^2) = 0} \quad \lambda = \pm i$

NON ESISTONO AUTOVALORI (ED AUTOVETTORI) in $\mathbb{R}$

ESISTONO DUE AUTOVALORI in $\mathbb{C}$

$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\quad A(u) = \lambda u$

$\begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$ $\quad A(u)$

$u_2 = \lambda u_1$

$0 = \lambda u_2$

$\lambda = 0$

$u_2 = 0$

$\lambda = 0$ oppure

$u_2 = 0$ sistema degli autovettori

$\lambda \neq 0 \Rightarrow u_2 = 0$

I^+

$u_1 = 0$

$u_1 = \frac{u_2}{\lambda}$

u_1 arbitrario

α scelto ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono autovettori } (\alpha \neq 0) \right\}$

$\dim = 1$

$(0,0)$ è l'unica soluzione se $\lambda \neq 0$

NON ESISTONO BASI SPETTR. perché $\dim = 1$

Siano $u_1 \dots u_k$ autovettori di A, relativi a $\lambda_1 \dots \lambda_k$ a due a due distinti

Allora $u_1 \dots u_k$ sono indipendenti

DIM. Induzione su k

$k=1$ $P(1)$ { Basta dire che è vera perché $u_1 \neq 0$ in quanto autovettore e è indipendente.

$P(n) \not\Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

se I: $P(1)$ è vera

e se IV: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n$

$P(1) \xRightarrow{\text{IV per } n=1} P(2)$

$P(2) \xRightarrow{\text{IV } n=2} P(3)$

ogni sistema di n autovettori relativi ad autovalori distinti è indipendente

↓

lo stesso per $n+1$ vettori

Prova per assurdo: supponiamo sia falso

$u_1 \dots u_{n+1}$ dipendenti, autovettori di n autovalori distinti

ma la tesi è vera per n autovettori

$u_1 \dots u_n$ sono indipendenti per $P(n)$ $u_1 \dots u_n u_{n+1}$ sono dipendenti

$u_{n+1} = \sum_1^n \alpha_i u_i \neq 0 \Rightarrow$

$A(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} u_{n+1} =$

$= \lambda_{n+1} \sum_1^n \alpha_i u_i =$

$= \sum_1^n \alpha_i \lambda_{n+1} u_i$

$A\left(\sum_1^n \alpha_i u_i\right)$

$\Downarrow$

$\sum_1^n \alpha_i A(u_i) = \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i$

$\lambda_i u_i$

$\sum_1^n \left(\lambda_{n+1} - \lambda_i\right) \alpha_i u_i = 0$

$\lambda_{n+1} \neq \lambda_i$

$u_1 .. u_n$ sono n autovettori che sono linearmente indipendenti per $\mathbb{P}(n)$

$(\lambda_{n+1} - \lambda_i)\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1..n$

$\lambda_{n+1} \neq \lambda_i$

$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1..n$

AL_7.1

Poiché $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$ ma segue

$$u_{n+1} = \sum_{1}^{n} \alpha_i u_i = 0$$ ASSURDO

perché u_{n+1} è autovettore.