Note Title 12/17/2020

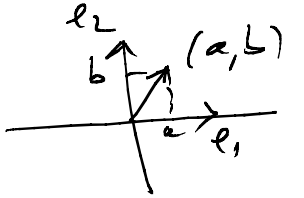
X spazio di dimensione finita. Fissata una base $u_1 \dots u_n$

$\dim X = n$

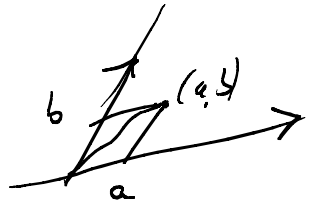
$\forall x \in X \quad \exists! \, x_1 \dots x_n : \quad x = \sum_{1}^{n} x_i u_i$

$\exists!$ = unicità

$x \in X \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$



COME VARIANO LE COORDINATE (dello stesso vettore) QUANDO SI CAMBIA BASE?



MATRICE DI CAMBIO DI BASE

X, $\{u_1 \dots u_n\}$ e $\{u'_1 \dots u'_n\}$ due basi di X

M matrice di cambio di base (da $u_1 \dots u_n$, base "vecchia" a $u'_1 \dots u'_n$ base "nuova")

$$u'_j = M_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} u_i$$

M_{ij} $i = 1 \dots n$ sono le coordinate di u'_j rispetto alla base $u_1 \dots u_n$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$u_1 \quad u_2 \qquad u_1' \qquad u_2'$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I - II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$u_1' \quad u_2' \qquad\qquad u_1 \quad u_2$

$$(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$u_1 \dots u_n \mid u_1' \dots u_n'$

GAUSS - JORDAN $\longrightarrow$ $e_1 \dots e_n \mid M$

$x = x_i u_i$ $\qquad x_i \longrightarrow x'_i$

$x = x_i' u_i'$

$x = x'_i u'_i = \boxed{x'_i M_{ji} u_j}$ coordinate di x rispetto a u_j

$\Longrightarrow$

$x = x_j u_j$ base

x_j = le coordinate di x rispetto a u_j

$$\boxed{x_j = M_{ji} x'_i}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

prodotto di matrici

Moltp. anche i membri per M^{-1}

$$M^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{M^{-1}M}_{I}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$A : X \longrightarrow Y$$

$e_1 \dots e_n$ base di X

$e'_1 \dots e'_m$ base di Y

MATRICE ASSOCIATA ad A e alle basi $(e_1 \dots e_n)$ in X e $(e'_1 \dots e'_m)$ in Y è definita da

$$A(e_j) = A_{ij}\, e'_i$$

coordinate

A_{ij} → base di Y

A_{ij} è la coordinata di $A(e_j)$ rispetto a e'_i

PROPRIETÀ FONDAMENTALE

$$A(x) = A\left(x_i e_i\right) \underset{\text{lin.}}{=} x_i A(e_i) = x_i A_{ji} e'_j \in Y$$

$A(x) \in Y$

scalari

$$\begin{array}{ccc} x & X & \longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ \downarrow A & \downarrow & \searrow x \\ A(x) \in Y & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^m \quad Ax \end{array}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

coordinate di $A(x)$ rispetto alla base d'arrivo $e'_1 \sim e'_m$

COME CAMBIA LA MATRICE ASSOCIATA SE SI CAMBIANO LE BASI

AL_6.X
scorletta a AL_6.1

$A : X \to Y$

$e_1 \dots e_n$ base di X
$e'_1 \dots e'_n$

$f_1 \dots f_m$ base di Y
$f'_1 \dots f'_m$

A matrice associata ad A e alle basi "vecchie" $e_1 \dots e_n$, $f_1 \dots f_m$ $\downarrow M$

A' matr. ass. ad A rispetto alle basi "nuove" $e'_1 \dots e'_n$ ed $f'_1 \dots f'_m$ $\xrightarrow{N}$

$A \leftrightarrow A'$

M matrice di cambio di base da $e_1 \dots e_n$ a $e'_1 \dots e'_n$
N " " " " da $f_1 \dots f_m$ a $f'_1 \dots f'_m$

$$A(e'_i) \overset{\text{cambio base}}{=} A(M_{ji}\, e_j) \overset{\text{lineare}}{=} M_{ji}\, A(e_j) =$$

$$= M_{ji}\, A_{kj}\, f_k = M_{ji}\, A_{kj}\, N^{-1}_{hk}\, f'_h$$

$$(N^{-1} A M)_{hi}\, f'_h$$

$$A'_{hi}$$

$$f'_h = N_{kh}\, f_k$$

$$f_k = N^{-1}_{hk}\, f'_h$$

vedi anche

$$A' = N^{-1} A M$$

$f_1 \cdots f_m$ $\quad$ $f'_1 \cdots f'_m$ base di Y

$$f'_j = N_{ij}\, f_i$$

$$f_k = H_{lk}\, f'_l$$

H matrice di cambio di base da $f'_1 \cdots f'_m$ a $f_1 \cdots f_m$

$$f'_j = N_{ij} f_i = \overbrace{N_{ij} H_{ki}}^{(HN)_{kj}} f'_k$$

f'_j = $0 f'_1 + \dots + 0 f'_{j-1} + 1 f'_j + 0 \dots + 0 f'_m$

N_{ij}: note; H_{ki}: incognite

Se secondo membro è una combinazione della base $f'_1 \dots f'_m$ uguale a f'_j

ne segue che $(HN)_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\boxed{H = N^{-1}}$$

$A : X \to Y \qquad B : Y \to Z$

$e_1 \dots e_n \qquad e'_1 \dots e'_m \qquad e''_1 \dots e''_p \qquad \in \mathbb{R}(0,6)$

$$B(A(e_i)) \underset{\text{def. d'A}}{=} B(A_{ji} e'_j) = A_{ji} B(e'_j) \underset{\text{def. B}}{=} \overbrace{A_{ji} B_{hj}}^{e} e''_h = \underset{Z}{=}$$

$= \underbrace{(BA)_{hi}}\, e''_h \Rightarrow$ La matrice associata al prodotto $x \to B(A(x))$ è la matrice prodotto BA delle matrici associate a B ed A.

$\Downarrow$

A è invertibile $\Rightarrow$ la matrice associata alla trasformazione A^{-1} è l'inversa di quella di A

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C} \ \forall i = 1 \dots n\}$ scalari $\boxed{\mathbb{C}}$

$\boxed{0 = (0, \dots, 0)}$ $\boxed{e_1 = (1, 0 \dots 0) \quad \dots \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)}$

$z = (z_1, z_2 \dots z_n) = z_1 e_1 + z_2 e_2 + \dots + z_n e_n$

Prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$

$$ab = \boxed{\sum_1^n a_i \overline{b_i}}$$

↑ non si usava con i complessi

$(i,i)(i,i) = i(-i) + i(-i) = 2 \geq 0$

1) $aa \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{C}^n$ $\quad aa = \sum a_i \overline{a_i} = \sum_1^n |a_i|^2$

2) $aa = 0 \iff a = 0$

3) $ba = \overline{ab}$ $\quad \overline{\sum b_i \overline{a_i}} = ba \iff \overline{\left(\sum a_i \overline{b_i}\right)} = \sum_1^n a_i \overline{b_i}$

emisimmetrico

$\mathbb{R}^n$

$$ab = \sum_1^n a_i b_i$$

$\boxed{aa \geq 0} \ \forall a \in \mathbb{R}^n$

$aa = 0 \iff a = 0$

se fossimo in $\mathbb{C}^n$ $\quad aa = \sum a_i^2$ $\quad \mathbb{C}^2$ $a = (i, i)$, $a_1^2 + a_2^2 = -2$

dovrebbe valere che $aa \geq 0$

4) $(a+b)c = ac + bc$

$(\lambda a)b = \lambda(ab)$

$a(b+c) = ab + ac$

$a(\lambda b) = \bar{\lambda}\, ab$

$$a(\lambda b) = \sum_1^n a_i \overline{(\lambda b_i)} =$$

$$= \sum_1^n a_i \bar{\lambda} \bar{b_i} = \bar{\lambda} \sum a_i \bar{b_i} =$$

$$= \bar{\lambda}\, ab$$

$$a(b+c) = \sum a_i \overline{(b+c)_i} =$$

$$= \sum a_i (\bar{b_i} + \bar{c_i}) =$$

$$= \sum a_i \bar{b_i} + \sum a_i \bar{c_i} =$$

$$= ab + ac$$

$|a| = \sqrt{aa} \quad \forall a \in \mathbb{C}^n$

norma euclidea

AL_2.2

$a = (i, i) \quad \bar{a} = (-i, -i)$

$aa = \sum a_i \bar{a}_i = i(-i) + i(-i) = 2$

$ax^2+bx+c=0$ $\quad ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ $\Delta>0$

$a(x-\bar{x})^2$ $\Delta=0$

a · somma di quadrati $\Delta<0$

$$H(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j \qquad H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

forma quadratica = polinomio omogeneo di grado 2

$3xy - 2xz + z^2 + x^2$

se a_{ij} è diagonale $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ Se H ammette la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

Es. $x^2+2y^2-3z^2+4t^2$

$H(e_1) = \lambda_1 1^2 + \lambda_2 0^2 + \dots + \lambda_n 0^2 = \lambda_1$ (e_1: base canonica)

$H(e_n) = \lambda_1 0^2 + \dots + \lambda_{n-1} 0^2 + \lambda_n 1^2 = \lambda_n$