Note Title 12/12/2020

$f \in C^1(\Omega)$ $\Omega$ aperto $\Longrightarrow \exists\, df$ in $\Omega \times \mathbb{R}^n$

Th. diff. totale

---

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di grado $\geq 1$ ha zeri

$(\exists\, z^* : p(z^*) = 0)$

Th. differenziale di potenziale

CNS perché $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ sia potenziale ($(\gamma(a), \gamma(b))$)

è che $\int_\gamma A$ dipenda solo dagli estremi e non dal cammino di $\gamma$.

CAMPI ETEROMEE (I)?

---

$x_0$ è di accumulazione per $\Omega$ se $\forall \rho > 0 \ \exists x \in \Omega, x \neq x_0$ tale che $x \in \Omega \cap B_\rho(x_0)$

$x_0$ è isolato per $\Omega$ se $\exists \bar{\rho} > 0 : \Omega \cap B_{\bar{\rho}}(x_0) = \{x_0\}$

1) $p(z)$ polinomio non costante su $\mathbb{C}$.

2) $p(z_0) \neq 0$

**Allora** $\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C} : |p(\bar{z})| < |p(z_0)|$

**Dim.** $w = 0 \to q(w) = \dfrac{p(z_0 + w)}{p(z_0)}$

$q$ è un polinomio dello stesso grado di $p$ quindi NON COSTANTE

grado $\geq 1$

$$q(w) = q(0) + a_k w^k + \dots + w^{k+1} \tilde{q}(w)$$

ove $k$ è il più piccolo intero non nullo per cui il coefficiente di $w^k$ è $\neq 0$

$q(0) = 1$

Faremo vedere che $\exists\, \bar{w}$ : $|q(\bar{w})| < 1$ $\quad |f(z_0 + \bar{w})| < |p(z_0)|$

pone $\bar{z} = z_0 + \bar{w}$

$$|q(w)| \le |1 + \alpha_k w^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

$\exists \tilde{w}$: $\alpha_k \tilde{w}^k$ sia reale, negativo e di modulo $< 1$. Perché? Ne segue che

$$|1 + \alpha_k \tilde{w}^k| = 1 - |\alpha_k \tilde{w}^k|$$

$$|q(\tilde{w})| \le 1 - |\alpha_k \tilde{w}^k| + |\tilde{w}|^{k+1} |\tilde{q}(\tilde{w})| = 1 - |\tilde{w}|^k \underbrace{\left[ |\alpha_k| - |\tilde{w}| \, |\tilde{q}(w)| \right]}_{>0}$$

($|\tilde{w}| \to 0$, $|\alpha_k| > 0$)

per il Th. permanenza segno $[\ ] > 0$ per $|w|$ abbastanza piccolo

$< 1$ $\Rightarrow$ la tesi prendo $\bar{z} = z_0 + w^*$

$$|\alpha_k w^k| = |\alpha_k| |w|^k < 1$$

accade se

$$|w|^k < \frac{1}{|\alpha_k|} \iff \boxed{|w| \le \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}}$$

Th fondamentale dell'algebra

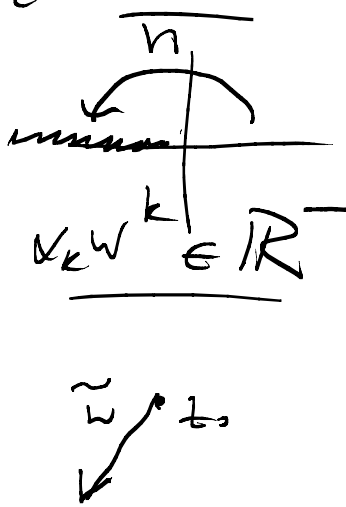
$$\boxed{|\alpha_k w^k| < 1}$$

---

$\alpha_k w^k \in \mathbb{R}$ e' un numero. Basta che sia

$$\arg \alpha_k w^k = \pi$$

$$\arg \alpha_k + k \arg w$$

$$\boxed{\arg w = \frac{\pi - \arg \alpha_k}{k}} \Rightarrow$$

$\alpha_k w^k \in \mathbb{R}^-$