Note Title 12/11/2020

$$A\underbrace{(e_2\ e_1\ e_3 \dots e_n)}_{\parallel}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

scambiato I e II colonna della matrice identica.

matrici di permutazione.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(\underbrace{Ae_2}_{\parallel}\ \ Ae_1\ \ Ae_3 \dots Ae_n)$$

$$\parallel$$

$$(\underline{\underline{A_2}}\ \ \underline{\underline{A_1}}\ \ A_3 \dots A_n)$$

Per permutare le righe, moltiplicare da sinistra.

MATRICI (II)

AL - 4.3 ?

$$\bar{\imath} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \alpha & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & 0 \end{pmatrix} = G$$

$\bar{\jmath}$

$$G_{ij} = \begin{cases} \alpha & i = \bar{\imath} \\ & j = \bar{\jmath} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(GA)_{ij} = G_{ih} A_{hj} = \begin{cases} G_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} A_{\bar{\jmath}j} = \alpha A_{\bar{\jmath}j} \\ \quad \neq \alpha \qquad i = \bar{\imath} \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\sum_{h=1}^{n}$ Einstein.

$$\bar{\imath} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha \text{ riga } \bar{\jmath} \text{ di } A & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Per vedere un'operazione elementare dell'algoritmo di Gauss basta moltiplicare per

$$\left(I + G^{(\bar{i},\bar{j})}\right) A =$$

$$= IA + G^{(\bar{i},\bar{j})} A =$$

$$= A + \left(\begin{array}{l}\text{matrice tutta nulla salvo la riga } \bar{i}\text{, che è la riga } \bar{j} \text{ di } A \\ \text{moltiplicata per lo scalare } \alpha\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \alpha & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{2} & 4 \end{pmatrix}$$

G

A

il doppio ($\alpha = 2$) della I riga ($\bar{j} = 1$) sommato alla II ($\bar{i} = 2$)

$\alpha = 2 \quad \bar{i} = 2 \quad \bar{j} = 1$

$(\underline{\text{I}} + 6)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{5} & 8 \end{pmatrix}$$

$2\,\text{I}$ $\quad$ II $\quad$ Somma della II + 2 I

NUMERICAL RECIPES IN
(FORTRAN, C, C++ ...)

Press, Vetterling, Teucholskij, Flannery

$A^T = A^*$ per le matrici reali

$$\left(A^*\right)_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

Per le matrici reali $\left(A^*\right)_{ij} = A_{ji}$

$$\boxed{(A^*)^* = A}$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$\left[(AB)^*\right]_{ij} = \overline{(AB)}_{ji}$$

$$(B^* A^*)_{ij} = (B^*)_{ih} (A^*)_{hj} =$$

$$= \overline{B}_{hi}\, \overline{A}_{jh} = \overline{A}_{jh}\, \overline{B}_{hi} =$$

scalari

$$= A_{jh} B_{hi} = \overline{(AB)}_{ji}$$

$$(Ax)y = x(A^* y)$$

$Ax \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ — prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A^* y \in \mathbb{R}^n$ — prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

$Ax \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

$A^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$A^* y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

I membro

$$(Ax)y = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right] y_i = \sum_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} A_{ij} x_j y_i \quad (M)$$

II membro

$$x_h \underbrace{A^*_{hk} y_k}_{\text{componente } h\text{-esima di } A^* y} = A_{kh} y_k x_h$$

reali

$$x_h (A^*_{hk} y_k) = A_{kh} y_k x_h \quad N$$

$$(A^* y)_h$$

$N = M$

MATRICI (IV)

$\boxed{\text{AL\_4.4}}$

In $\mathbb{C}^n$ il prodotto scalare si definisce ponendo $ab = \sum_1^n a_i \overline{b_i}$

$$ab = \overline{b_a}$$

Se $A = A^*$ A si dice AUTOAGGIUNTA

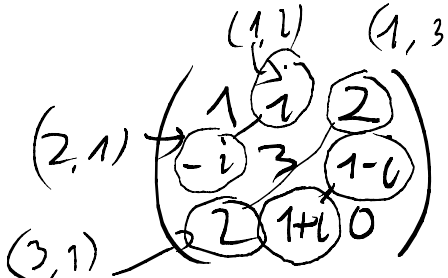
$$(Ax)y = x(Ay)$$

devo accedere che

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}} \Rightarrow$$

A_{ii} è reale

$A_{ii} = \overline{A_{ii}}$



1) diagonale reale

2) valori simmetrici rispetto alla diagonale coniugati

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora A è autoaggiunta se

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}} = A_{ji}$$

i valori simmetrici sono uguali $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è autoaggiunta

si CHIAMANO ANCHE MATRICI SIMMETRICHE

DETERMINANTI

$A = (A_1 \dots A_n)$ $A_n \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ARTIN quadrata

$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{R}$

il det è una funzione scalare delle colonne di ogni matrice quadrata.

(1) $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$

(2) Scambiando due colonne, il determinante cambia di segno. (ALTERNANTE)

$\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots A_n) =$ Scambio A_i con A_j

$= -(A_1, A_2, \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$

(3) MULTILINEARE

È funzione LINEARE di ogni colonna, se le bloccano tutte le altre.

Linearità rispetto alla I colonna.

$$\begin{cases} \det(A+B, A_2, \dots, A_n) = \det(A, A_2, \dots, A_n) + \det(B, A_2, \dots A_n) \\ \det(\alpha A, A_2, \dots, A_n) = \alpha \det(A, A_2, \dots, A_n) \end{cases}$$

LO STESSO PER TUTTE LE ALTRE COLONNE

Det. è <u>l'unica</u> funzione scalare multilineare alternante che vale 1 sulla base canonica.

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \det\ 2 \times 2$$

1) $$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1}$$

2) colonne permutate

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ALTERNANTE

3) Tenendo prima la seconda colonna $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\boxed{d} - \boxed{b}c$$ = polinomio omogeneo di I grado nelle incognite (a, c)

coterminante (II colonna)

$A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ dipendenti allora

$$\det(A_1, \dots, A_n) = 0$$

Dim. se $\boxed{A_1 = \sum_2^n \alpha_i A_i}$

$$\det(A_1, A_2, \dots, A_n) = \det\left(\sum_2^n \alpha_i A_i, A_2, \dots A_n\right) =$$

($\sum_2^n \alpha_i A_i = A_1$)

fisso

$$= \sum_2^n \alpha_i \det(A_i, A_2, \dots, A_n) = 0$$

per $i = 2$ ad n ci sono sempre due colonne uguali

Se due colonne sono uguali allora il $\det = 0$

$\det(A_1, A_2, \dots, A_n) = -\det(A_2, A_1, \dots, A_n)$

Se però $A_1 = A_2$ allora il det coincide col suo opposto

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{perché} \quad \boxed{III = 2I - II}$$

DETERMINANTI (1)

LEMMA Il det non cambia se si somma ad una colonna una combinazione delle altre

DIM

$$\det\left(A_1 + \sum_{2}^{n} \alpha_i A_i,\ A_2 \dots A_n\right) =$$

($A_2 \dots A_n$: bloccate)

$$= \det(A_1, A_2, \dots A_n) + \sum_{2}^{n} \alpha_i \det(A_i, A_2, \dots, A_n)$$

$\det A$

tutti nulli (colonne ripetute)

"4)" $\boxed{\det A^T = \det A}$

"5)" $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ th. BINET (prop. bini)

Se $\det(A_1, \dots, A_n) = 0 \Rightarrow A_1 \dots A_n$ sono dipendenti

DIM. Per assurdo

$\det(A_1 \dots A_n) = 0$ ma $A_1 \dots A_n$ indip. ($\Rightarrow$ assurdo)

$\hookrightarrow$ per il th. generatori $A_1 \dots A_n$ sono una base

$$e_1 = \alpha^1_{i_1} A_{i_1}$$

$$\vdots$$

$$e_n = \alpha^n_{i_n} A_{i_n}$$

$$1 = \det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det\left(\alpha_{i_1}^1 A_{i_1}, \underbrace{\alpha_{i_2}^2 A_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}^n A_{i_n}}_{\text{bloccate}}\right) =$$

$$= \alpha_{i_1}^1 \det\left(A_{i_1}, \overbrace{\alpha_{i_2}^2 A_{i_2}, \text{inalterate}}\right) =$$

lineare rispetto alle II colonne, bloccate e altre

$$= \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \det(A_{i_1}, A_{i_2}, \text{inalterate}) =$$

ripetendo per tutte le colonne

$$= \boxed{\sum_{i_1, i_2, \dots i_n = 1}^{n}} \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \dots \alpha_{i_n}^n \underline{\det(A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_n})}$$

o hanno colonne ripetute (det = 0)

oppure $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_n}$ sono una permut. di $A_1 \dots A_n$

e quindi $\det(A_{i_1}, \dots A_{i_n}) = 0$

(basta scambiare ricordando che $\det(A_1 \dots A_n) = 0$ per ipotesi)

$$\Longrightarrow 1 = 0$$

ASSURDO

REGOLA DI CRAMER

$Ax = B$ $\quad A = (A_1, \dots, A_n)$ $\quad \det A \neq 0$, cioè $A_1 \dots A_n$ linearmente

allora

$$x_1 = \frac{\det(B, A_2, \dots, A_n)}{\det A} \qquad x_2 \text{ ---- } \qquad x_n = \frac{\det(A_1, \dots, A_{n-1}, B)}{\det A}$$

DIM Siccome $A_1 \dots A_n$ sono indipendenti allora il sistema lineare $Ax = \sum_1^n x_i A_i = B$ ha una unica soluzione $(x_1 \dots x_n)$. Allora

$$\det(B, A_2, \dots, A_n) = \det\Big(\underbrace{\sum_1^n x_i A_i}_{B}, \underbrace{A_2, \dots, A_n}_{\text{fermi}}\Big) =$$

$$= \sum_{1}^{n} x_i \det(A_i, \underbrace{A_2, \dots, A_n}_{\text{bloccate}}) =$$

$$= \boxed{x_1 \det(A_1, A_2, \dots, A_n)}$$

$\forall i = 2 \dots n$

$\det(A_i, A_2, \dots, A_n) = 0$ dunque

$$\det(B, A_2, \dots, A_n) = x_1 \underbrace{\det(A_1, A_2, \dots A_n)}_{\neq 0 \text{ per ipotesi}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \frac{\det(B, A_2, \dots A_n)}{\det(A_1, A_2, \dots A_n) \neq 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

SCANBI: 1

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 14+\frac{99}{6} \end{vmatrix}$$

II − 2I
III − I
IV − I
II
IV
III + 2II
IV + 5II
IV − $\frac{11}{6}$III

$$\det = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \left(14+\frac{99}{6}\right)$$

WOLFRAMALPHA.com

$$|e_1\ e_2| = \left|\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^1 A_i \quad \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^2 A_j\right| = \left| \begin{matrix} i_1 = i \\ i_2 = j \end{matrix} \right.$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^1 \left| A_i \quad \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^2 A_j \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \alpha_i^1 \alpha_j^2 \underbrace{|A_i A_j|}_{2\times 2} =$$

$$= \alpha_1^1 \alpha_1^2 \underbrace{|A_1 A_1|}_{=0} + \alpha_2^1 \alpha_1^2 \underbrace{|A_1 A_2|}_{=0 \text{ ipotesi}} +$$

$$+ \alpha_2^1 \alpha_1^2 \underbrace{|A_2 A_1|}_{=0 \text{ ipotesi}} + \alpha_2^1 \alpha_2^2 \underbrace{|A_2 A_2|}_{=0}$$