Note Title 12/3/2020

AL_2.1 formula dell'area

G_1.8 G_1.9

PRODOTTO VETTORE

# MATRICI

$$\begin{array}{c} \\ i \text{ riga} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{ij} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}$$

colonna

$A^i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ riga i-esima

$A_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \cdots \ a_{mj})$ colonna j-esima

L'insieme delle matrici con m righe ed n colonne si denota con $\mathbb{R}^{m \times n}$, se i coefficienti sono reali ($\mathbb{Q}^{m \times n}$ razionali; $\mathbb{C}^{m \times n}$ complessi)

$a, b \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad a+b$ ?

$a+b \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\rightarrow \quad (a+b)_{ij} \underset{def.}{\equiv} a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$\mathbb{Q}^{2 \times 3}$

$\mathbb{Z}^{2 \times 2}$

array a due indici

$2 \times 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$

$(a+b)_{11} \quad (a+b)_{12}$

$$= \begin{pmatrix} 1-1 & 2+3 \\ 3+2 & 4-3 \end{pmatrix}$$

$(a+b)_{21} \quad (a+b)_{22}$

$\mathbb{R}^{1 \times 4}$ 1 riga, 4 colonne

$(-1, 3, \pi, 3/4)$

$\mathbb{R}^{3 \times 1}$ 3 righe, 1 colonna $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Le matrici di tipo $\mathbb{R}^{1\times n}$ si dicono anche

<u>VETTORI RIGA</u>

Quelle di tipo $\mathbb{R}^{m\times 1}$ si dicono

<u>VETTORI COLONNA</u>

---

$\rightarrow$ $0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\boxed{0_{ij} = 0 \quad \forall i,j}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

è $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $a \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad (-a)_{ij} = -a_{ij}$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AL_4.1/4.2 ..

$\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad \lambda a$ ? $\longleftarrow$

$$(\lambda a)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

---

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$$

distributivita

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

$$1a = a$$

$$\boxed{a+b = b+a}$$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$a+0 = a$$

$$a+(-a) = 0$$

sono uguali perché sono numeri

$$(a+b)_{ij} = \underline{a_{ij}+b_{ij}} \qquad (b+a)_{ij} = \underline{b_{ij}+a_{ij}}$$

$\boxed{\mathbb{R}^{m \times n} \text{ è uno spazio vettoriale}}$

MATRICE QUADRATA $\boxed{\mathbb{R}^{n \times n}}$ $n$ intero $1..n..$

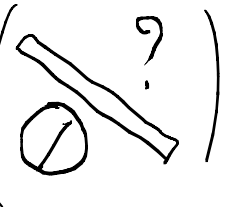
" DIAGONALE $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \text{arbitrario} & \text{se } i = j \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ o anche $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

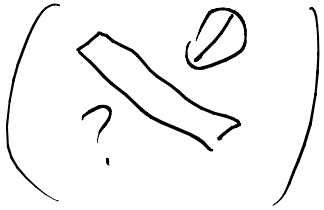
" IDENTICA

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \boxed{\delta_{ij} \quad \text{delta di Kronecker}}$

" TRIANGOLARE SUPERIORE

$\boxed{a_{ij} = 0 \quad i > j}$ 

# TRIANGOLARE INFERIORE




$$\boxed{a_{ij} = 0 \text{ se } i < j}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

triangolare superiore

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

0

---

$\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 9 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 & -7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

Matrice estratta ovvero MINORE $\longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ MINORE (ESTRATTO)

Selezionando lo stesso numero di indici per righe e colonne, si parlerà di MINORI PRINCIPALI

selezionando $\{1,2\}$ per le righe e $\{1,2\}$ per le colonne

si ottiene $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ MINORE PRINCIPALE della matrice 4x4 precedente

$\{1,2,3\}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

# CONVENZIONE DI EINSTEIN

$$\boxed{A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i B_i}$$

Per esempio $\longrightarrow$ $A_i B_i$ è esattamente il valore del prodotto fra il numero $A_i$ e il numero $B_i$

Se invece $i$ è un indice LIBERO RIPETUTO, allora si sottintende la somma.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$a_i b_i$ è il prodotto scalare fra $a$ e $b$.

abbreviazioni di

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{a_i b_i}_{\text{indice libero}}} = \boxed{\underbrace{a_k b_k}_{\text{indice libero}}} = \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}$$

AL_4.2

$$A_{ijh} B_{ijk} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ijh} B_{ijk}$$ i e j sono ripetuti

h e k MO

---

# PRODOTTO DI MATRICI

Date $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ si definisce

$AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ponendo

$$(AB)_{i,j} = A_{ih} B_{hj} \equiv \sum_{h=1}^{n} A_{ih} B_{hj}$$

$i = 1 \dots m$

$j = 1 \dots p$

EINSTEIN

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$AB \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m = 2$

$n = 3$

$p = 2$

$$(AB)_{21} = \sum_{h=1}^{3} A_{2h} B_{h1} = \underline{\underline{A_{21}}}\,\underline{\underline{B_{11}}} + \underline{\underline{A_{22}}}\,\underline{\underline{B_{21}}} + \underline{\underline{A_{23}}}\,\underline{\underline{B_{31}}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

riga 2 colonna 1

$(AB)_{21}$ = "prodotto scalare della seconda riga di A per la prima colonna di B"

$A_{11} = (2,1,1)(1,3,5) =$

$= 2+3+5 = 10$

$= (-1 \cdot 1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = -1+9+10 = 18$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$m \neq n \neq p$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$ è definito

$BA$

$\mathbb{R}^{n \times p}$ $\mathbb{R}^{m \times n}$

NON SONO UGUALI

<u>NON E' DEFINITO</u>

---

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$AB$ e $BA$ sono entrambi definiti, ma possono essere <u>diversi</u>!!

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$BA \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DIVERSI!

riga di A x colonna di B

$$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

riga di B x colonna A

$$AB \neq BA$$

$$(A+B)(A+B) = AA + BB + \underbrace{AB + BA}_{\text{diverse fra loro, in generale}}$$