Note Title 11/27/2020

LEMMA X sottospazio di Y, $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} Y$.

Allora $X = Y$.

Dim. Sia $u_1 \dots u_n$ base di X.

Allora $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti di vettori in Y in numero (n) pari a $\dim X = \dim Y$

Per il Th. generatori $u_1 \dots u_n$ generano Y e, essendo indipendenti, sono una base di Y.

$$X = \langle u_1 \dots u_n \rangle = Y$$

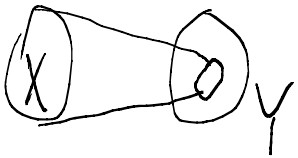
conclusione del th. Grassmann.

$$\dim \ker A = n = \dim X.$$

$\ker A$ è un sottospazio di X di uguale dimensione, per il lemma prec. $\ker A = X \Rightarrow$

$$\Rightarrow A(x) = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow A(X) = \{0\} \Rightarrow \dim A(X) = 0$$

$$\underset{n}{\dim X} = \underset{n}{\dim \ker} + \underset{0}{\dim A(X)}$$



Fig

Corollario del Lemma A è suriettiva se e solo se $\dim A(X) = \dim Y$. Siccome $A(X)$ è un sottospazio di Y di uguale dimensione, segue

$$\boxed{A(X) = Y}$$

Corollario del th. Grassmann

Invertire = della dimensione

CNS perché A sia iniettiva è che

$$\dim A(X) = \dim X$$

Dim. per Grassmann.

$$\dim X = \underbrace{\dim \ker A}_{\| \; 0} + \dim A(X)$$

Corollario

CNS perché A sia biiettiva è che

$$\dim X = \dim A(X) = \dim Y$$

$\dim X = \dim A(X)$: iniettività; $\dim A(X) = \dim Y$: suriettività

Th. Siano $A : X \to Y$, $\dim X = \dim Y$

Allora CNS perché A sia iniettiva è che sia suriettiva.

Dim.

A iniettiva $\Rightarrow$ A suriettiva.

$\dim A(X) = \dim X = \dim Y$

$\Rightarrow \dim A(X) = \dim Y \Rightarrow$ suriettività ✓

A suriettiva $\Rightarrow$ A iniettiva

A suriettiva, $A(X) = Y \Rightarrow \dim A(X) = \dim Y = \dim X$

$\dim A(X) = \dim X \Longrightarrow \dim \ker A = 0 \Rightarrow$ iniettiva

Grassm.

SÌ

$A : X \to Y$

$A(x) = A(x') \Longrightarrow x = x'$ def. iniettiva

Fissato y si consid. l'equazione $\boxed{A(x) = y}$ (*)

incognita, termine noto

INIETTIVA' $\Longleftrightarrow$ (*) o ha soluzione unica o non ne ha.

$A(x) = y \quad A(x') = y$

$A(x) = A(x') y \Longrightarrow x = x'$

SURIETTIVITÀ $A(x)=y$ ha soluzioni per ogni $y \in Y$

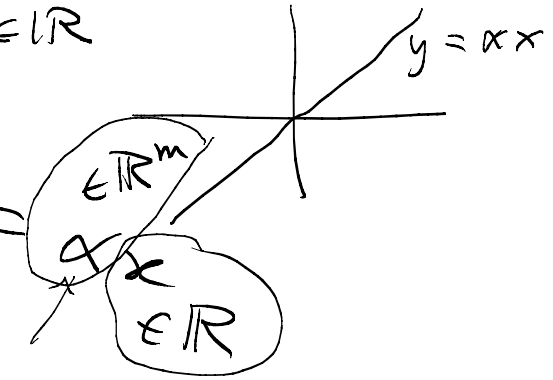
BIIETTIVITÀ $A(x)=y$ ha una ed una sola soluzione $\forall y \in Y$

$\left(\Downarrow A^{-1}(y)=x \right)$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

1) $n = m = 1$ $\quad A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad A(x) = A(x \cdot 1) = x \underbrace{A(1)}_{\in \mathbb{R}} = \alpha x$ $\quad \alpha = A(1)$

2) $n = 1$, $m > 1$ $\quad A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $\quad A(x) = x \underbrace{A(1)}_{\in \mathbb{R}^m} = x\alpha$ $\quad \alpha = A(1) \in \mathbb{R}^m$



3) $n > 1$, $m = 1$ $\quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad e_i$ base canonica

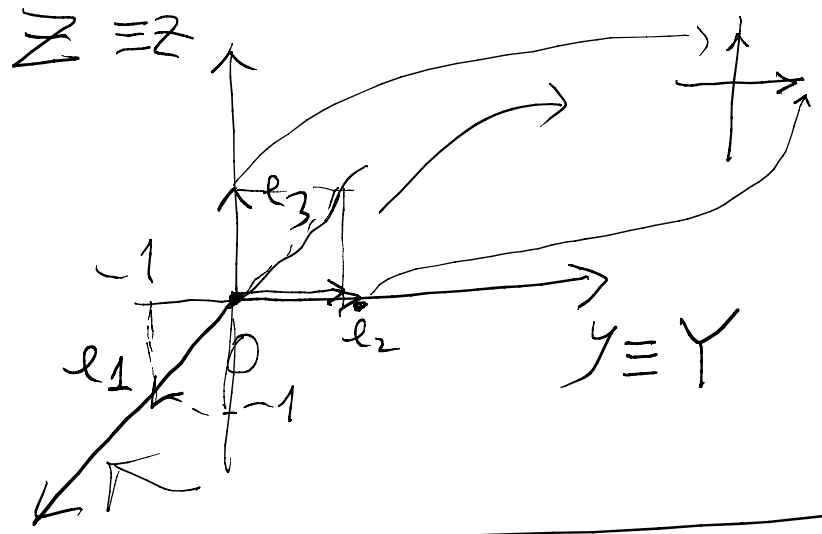
$$A(x) = A\left(\sum_1^n x_i e_i\right) = \sum_1^n x_i \underbrace{A(e_i)}_{\in \mathbb{R}} = \sum_1^n x_i \alpha_i = \alpha x$$

$\alpha = A(1) \in \mathbb{R}^m$, α_i

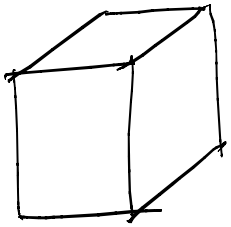
$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad x = (x_1 \dots x_n)$$

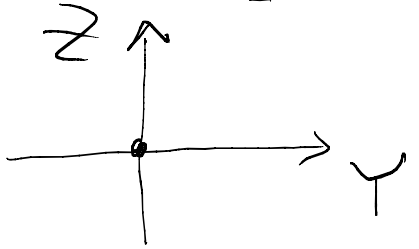
4) $n > 1$, $m > 1$ $\quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boxed{A(x) = \sum_1^n x_i \underbrace{A(e_i)}_{\in \mathbb{R}^m} = \sum_1^n x_i A_i} \qquad A_i$$



$(x,y,z) \longrightarrow (Y,Z)$





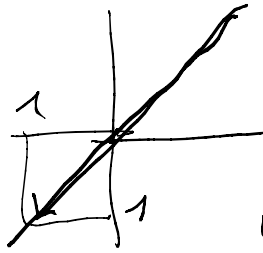
coordinate schermo

$$A(x,y,z) = A(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\,A(e_1) + y\,A(e_2) + z\,A(e_3)$$

$\mathbb{R}^3 \to$ $(0,1,0) \overset{e_2}{\longrightarrow} (1,0) \in \mathbb{R}^2$?

$(0,0,1) \overset{e_3}{\longrightarrow} (0,1)$

$(1,0,0) \overset{e_1}{=} (-1,-1)$



$$A(x,y,z) = x\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$(Y,Z) \qquad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\to \begin{cases} Y = -x + y \\ Z = -x + z \end{cases}$$

ASSONOMETRIA "CAVALIERA"

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A(xe_1 + ye_2 + ze_3) =$$

$$= x\underbrace{A(e_1)}_{\parallel} + y\underbrace{A(e_2)}_{} + z\underbrace{A(e_3)}_{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\exists A_i \in \mathbb{R}^m \quad \boxed{A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_1^n x_i A_i}, \quad A_i \in \mathbb{R}^m$$

A è iniettiva $\iff \ker A = \{0\} \iff$ Risolvere $\boxed{A(x) = 0}$ e provare che $\boxed{x = 0}$

$\sum_1^n x_i A_i = 0$ il sistema lineare omogeneo

$$\left.\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n & \\ \hline A_1 \dots A_n & 0 \end{array}\right.$$

ha solo la soluzione $x = 0$?

$\sum x_i A_i = 0$ ha solo la soluzione nulla se le colonne $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti

IN PRATICA A è iniettiva se il sistema $A_1, \dots, A_n | 0$ ha tutte le colonne pivot

---

①	−1	0	
1	1	2	
2	0	2	II − I
0	②	2	
0	2	2	III − 2II
0	0	0	III − II
^	^		

$$A(x,y,z) = x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A_1 = A(e_1) \quad A_2 = A(e_2) \quad A_3 = A(e_3)$

1	−1	0	
0	2	2	

↓ NON PIVOT

NON È INIETTIVA perché ha non-pivot

SURIETTIVITA'

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^2$

$$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

TEORIA

$A(x) = \sum_1^n x_i A_i$ è suriettiva se $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$

Ciò accade se fra le colonne $A_1 .. A_n$ ci sono m colonne indipendenti

$A(X) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

se ci sono m colonne indip. fra $A_1 .. A_n$

allora $\dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle = m$

$A(X) \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\dim A(X) = m \Rightarrow A(X) = \mathbb{R}^m$

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^2$

$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

x	y	z	w
(1)	2	1	3
2	−1	1	2

$0 \quad (-5) \quad -1 \quad -4 \quad \text{II} - 2\text{I}$

$\dim A(X) =$ numero di pivot dopo la riduzione a scala

Due pivot $\Rightarrow \dim A(\mathbb{R}^4) = 2$

BIIETTIVITA' $A(x) = \sum x_i A_i$

$\Updownarrow$

$A_1 \dots A_n$ indipendenti

$\Downarrow$

$\sum x_i A_i = 0$ ha solo la soluzione

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$\Rightarrow \ker A = \{0\}$

Per il th. generatori, $A_1 \dots A_n$ indipendenti ed $n = \dim \mathbb{R}^n$

$\Swarrow$

sono generatori di $\mathbb{R}^n$

$\sum_1^n x_i A_i = B$ ha soluzione unica $\forall B \in \mathbb{R}^n$

Data l'applicazione lineare $A(x) = \sum_1^n x_i A_i \quad A_i \in \mathbb{R}^m$

si riduce a scala il sistema $\left[A_1 \dots A_n \mid 0 \right]$

A è iniettiva se <u>ogni colonna</u> contiene pivot

A è suriettiva se ogni (equazione) riga contiene pivot

A è biiettiva se ogni riga e ogni colonna contengono pivot.

---

1) se $n > m$ (incog. > equaz.) $\Rightarrow$ A non può essere <u>iniettiva</u>

2) se $n < m$ $\Rightarrow$ A non può essere suriettiva

3) se $n = m$ $\Rightarrow$ A è biiettiva se (CRAMER) le colonne sono indipendenti

AL_1.1 II parte (pagg 32 e seguenti)