Note Title 11/26/2020

APPLICAZIONI LINEARI

$A : X \to Y$, X, Y spazi vettoriali, si dice LINEARE se vale

1) $A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in X$

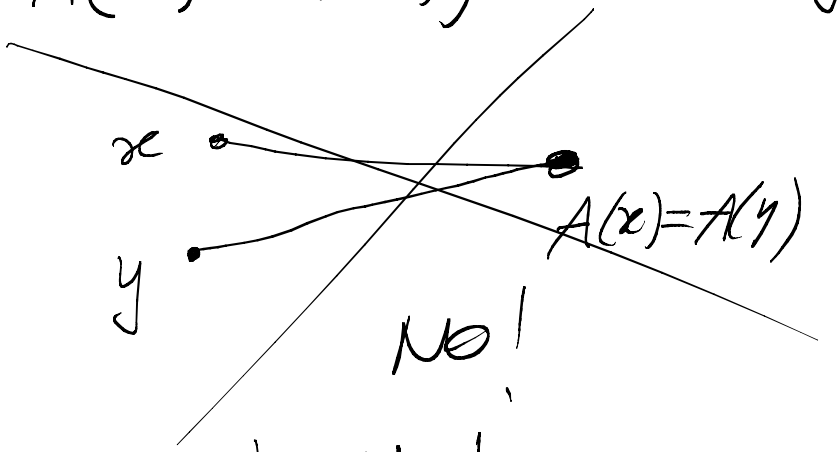
2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$

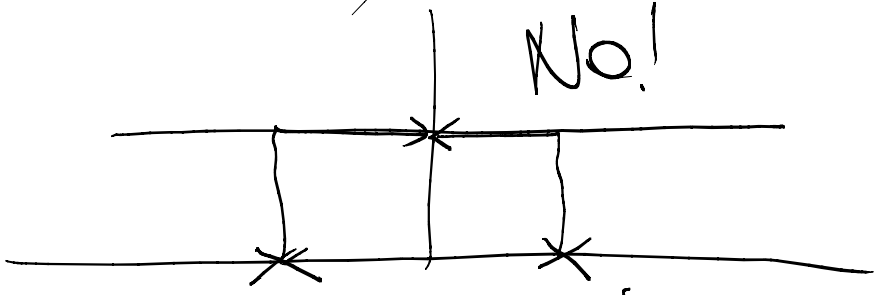
($A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$) Alternativa

NOTA $A(0) = 0$ $\qquad A(\underbrace{0 \cdot x}_{t \in X}) = \underbrace{0}_{\text{scalare}} A(x) = \underbrace{0}_{\text{vettore di } Y}$

$A : X \to Y$ **iniettiva** $A(x) = A(y) \Rightarrow x = y$

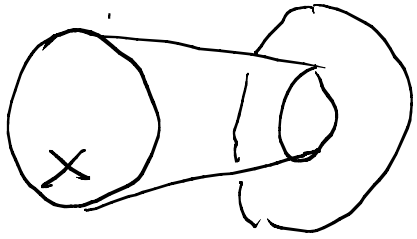
elementi distinti di X hanno associati valori distinti.



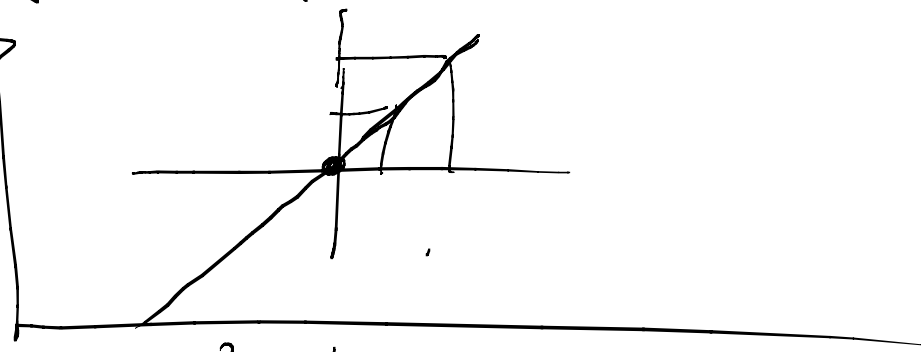


dominio codominio

$A : X \to Y$ suriettiva



$\forall y \in Y \; \exists x \in X : A(x) = y$



$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

NON È SURIETTIVA

infatti $\forall y < 0 \; \nexists x : x^2 = y$

$A : X \to Y$ bijettive se è iniettiva e suriettiva.

(ogni $y \in Y$ "proviene" da un unico $x \in X$)

$A : X \to Y$ LINEARE

NUCLEO DI A ($\operatorname{Ker} A$) si definisce ponendo

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X : A(x) = 0\}$$

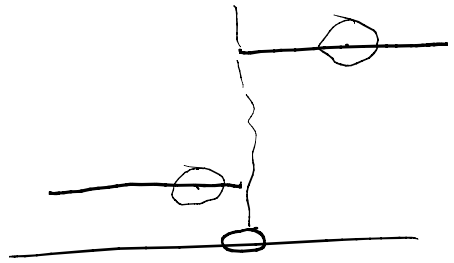
$\operatorname{Ker} A \ni 0$

IMMAGINE DI A ($\operatorname{Im} A$, $A(X)$)

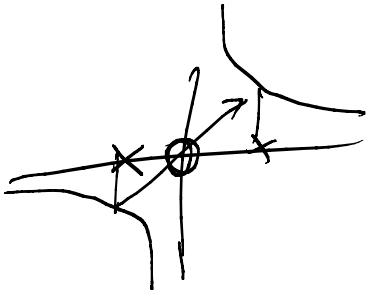
$$A(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \quad A(x) = y\}$$

$A(u) = u'$ $\quad u \in$ Funz.ni derivabili in $\underline{\Omega \subseteq \mathbb{R}}$

$\ker A \overset{?}{=}$ contiene le costanti

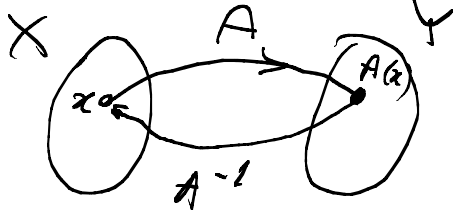


COSTANTI SU OGNI SOTTINTERVALLO DEL DOMINIO



$A : X \to Y \qquad B : Y \to Z$

$A(X) \subseteq Y$



$(A \circ B)(x) = B(A(x))$

A invertibile fra X e Y se $\exists A^{-1} : Y \to X$ tale che $A \circ A^{-1} = i_X$

$i_X : X \to X$

$i_X(x) = x$

$f(x) = x^2$ è invertibile su $\mathbb{R}_0^+$, poiché, posto

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

si ha $f \circ f^{-1}(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ $\quad x \geq 0$

Lemma **NUCLEO E IMMAGINE SONO SOTTOSPAZI**

(di X e di Y, rispettivamente)

$$\operatorname{Ker} A = \{ x \in X : A(x) = 0 \}$$

1) $x, x' \in \operatorname{Ker} A \overset{\text{def.}}{\iff} A(x) = 0 \,,\; A(x') = 0$

$$A(x + x') = A(x) + A(x') = 0 + 0 = 0$$

$x + x' \in \operatorname{Ker} A$

2) $A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda 0 = 0$

$\forall x \in \ker A \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

$A(X) \ni y, y' \Rightarrow \exists x, x' \in X : A(x) = y \quad A(x') = y'$

1) $A(x + x') = A(x) + A(x') = y + y' \Rightarrow y + y' \in A(X)$

($A(x)$ = y, $A(x')$ = y')

2) $y \in A(X) \Rightarrow \exists x \in X \ A(x) = y$

$A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda y \Rightarrow \lambda y \in A(X)$

$A(X)$ è un sottospazio

Ho come valore esatto λy

$\ker A \subseteq X$

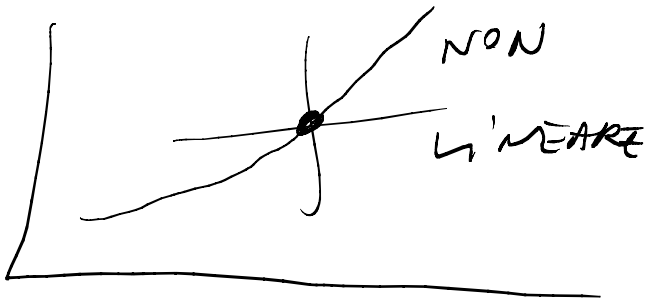
$A(X) \subseteq Y$

sia V

AL_5.1

$\boxed{A(x) \equiv 0} \Longrightarrow \ker A = X$

CNS perché $A : X \to Y$ lineare sia iniettiva è che $\ker A = \{0\}$



DIM. A LINEARE

CNA iniettiva $\Longrightarrow \ker A = \{0\}$

$A(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \ker A$ $\quad \forall w \in \ker A \quad A(w) = 0 = A(0)$

$\Rightarrow A(w) = A(0) \Longrightarrow w = 0.$

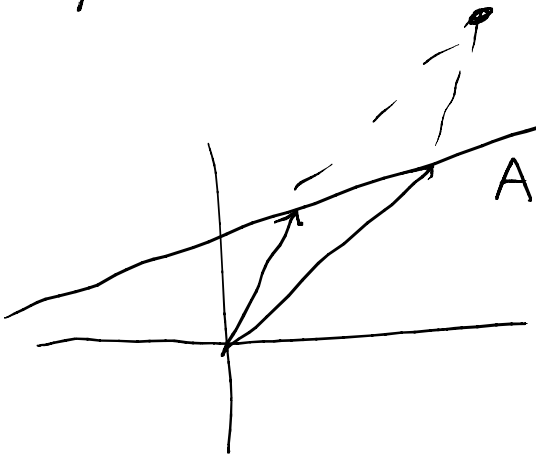
cs $\ker A = \{0\} \Longrightarrow A$ inietta

$x, x' \in X$: $A(x) = A(x') \overset{?}{\Longrightarrow} x = x'$

$0 = A(x) - A(x') = A(x - x')$

iniettiva

$A(x - x') = 0 \iff x - x' \in \ker A \Longrightarrow x - x' = 0 \Rightarrow x = x'$

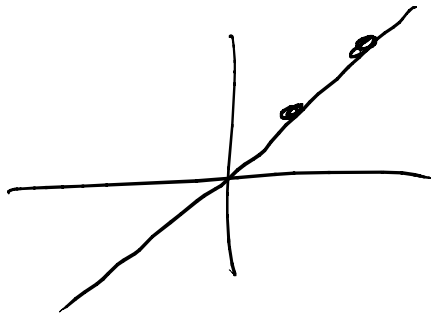


$A(x) = ax + b \quad a, b \neq 0$

$A(0) \neq 0$

$\|$

b



Th. generatori dell'immagine

Sia X di dim finita e sia $\langle u_1 \dots u_n \rangle = X$.

Per ogni $A : X \to Y$, Y spaziovettoriale arbitrario, si ha

$$A(X) = \langle A(u_1), A(u_2) \dots, A(u_n) \rangle.$$

DIM. $\forall x \in X \quad \exists \alpha_i : \quad x = \sum_1^n \alpha_i u_i$, perché

$u_1 \dots u_n$ generano X. Allora

$$A(x) = A\left(\sum_1^n \alpha_i u_i\right) = \sum_1^n \alpha_i A(u_i) \in \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle.$$

$$A(x) \in \langle A(u_1), \ldots, A(u_n) \rangle \quad \forall x \in X$$

$$A(X) \subseteq \langle A(u_1), \ldots, A(u_n) \rangle$$

$$A(u_1), A(u_2), \ldots, A(u_n) \in A(X)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle A(u_1), \ldots, A(u_n) \rangle \subseteq A(X)$$

Th. Grassmann (per le funzioni lineari)

$A : X \to Y$ lineare, $\dim X < \infty$.

Allora $\boxed{\dim X = \dim \ker A + \dim A(X)}$

DIM: $\dim \ker A = 0 \iff \ker A = \{0\}$.

(In tal caso A è iniettiva.)

Sia $u_1 \dots u_n$ una base del dominio X.

Per il Th. generatori dell'immagine $A(X) = \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$.

L'immagine $A(X)$ è generata da n vettori $A(u_1), \dots, A(u_n)$.

Proviamo che $A(u_1), \dots, A(u_n)$ sono indipendenti.

$$0 = \sum_1^n \lambda_i A(u_i) \overset{\text{linearità}}{=} A\left(\sum_1^n \lambda_i u_i\right) \iff \sum_1^n \lambda_i u_i \in \ker A$$

Poiché $\ker A = \{0\}$, ne segue $\sum_1^n \lambda_i u_i = 0$ e, dall'indipendenza di $u_1 \dots u_n$, si ha infine $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Dunque $A(u_1), \dots, A(u_n)$ è una base di $A(X)$ e infine

$$\dim A(X) = n = \dim X.$$

$$\dim X = \dim \ker A + \dim A(X)$$

$$n = 0 + n$$

$\dim \ker A = k, \quad 0 < k < \dim X = n.$

Sia $w_1 \dots w_k$ base di $\ker A$. ($\dim \ker A = k$)

Sia $w_1 \dots w_k x_{k+1} \dots x_n$ una base di X (per completamento)

$\forall x \in X \ \exists \alpha_i, \beta_j : \quad x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j$

$$A(x) = \sum_1^k \alpha_i A(w_i) + \sum_{k+1}^n \beta_j A(x_j) =$$

($w_i \in \ker A \Rightarrow A(w_i) = 0$)

$$= A\left(\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j\right)$$

$$= \sum_{k+1}^n \beta_j A(x_j) \in \langle A(x_{k+1}), \dots, A(x_n) \rangle$$

$A(x_{k+1}), \dots, A(x_n)$ sono indipendenti

$$0 = \sum_{k+1}^{n} \lambda_i A(x_i) = A\left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i\right) \Rightarrow \sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{Ker} A$$

Poiché $w_1 \dots w_k$ è una base di $\operatorname{Ker} A$, ne segue che

$$\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k : \sum_{1}^{k} \alpha_i w_i = \sum_{k+1}^{n} \lambda_j x_j$$

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i - \sum_{k+1}^{n} \lambda_j x_j = 0$$

Combinazione nulla di vettori della base di X $w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n$

Poiché $w_1 \dots w_k\, x_{k+1} \dots x_n$ è una base di X, i pedici sono indipendenti e quindi $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_j A(x_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

ne segue l'indipendenza di $A(x_{k+1}) \dots A(x_n)$

Ne segue che $\dim A(X) = n - k$ (numero dei vettori $A(x_{k+1}) \dots A(x_n)$)

$$\underset{\dim X}{n} = \underset{\dim \ker A}{k} + \underset{\dim A(X)}{(n-k)} \leftarrow$$

$\dim \ker = \dim X = n$ altrimenti $\ker A \subseteq X$

X sottosp. Y e $\dim X = \dim Y \Rightarrow X = Y$ ←

con uguale dimensione

$\ker A = X \Rightarrow A(x) = 0 \ \forall x$