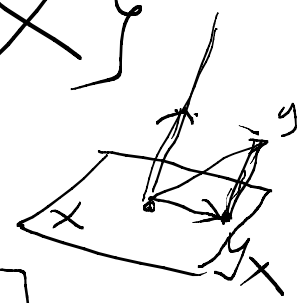
Note Title 11/23/2020

X sottospazio di Y

$$X^{\perp}_{\cancel{(Y)}} = \{ y \in Y : yx = 0 \quad \forall x \in X \}$$



$y \in Y$

$$y = \underbrace{y_X}_{\in X} + \underbrace{(y - y_X)}_{\text{Th. proiezione } \perp X}$$

$$\boxed{y - y_X = y_{X^\perp}}$$

1) $y_{X^\perp} \overset{?}{\in} X^\perp$ sì, per il Th. della proiezione

2) $\underbrace{y - (y - y_X)}_{y_X \in X}$ $\perp X^\perp$ e quindi $\perp X^\perp$

$\forall y \in Y \quad \forall X$ sottosp. di Y $\quad y = y_X + y_{X^\perp}$

decomp. ortogonale.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

A_1

OMOGENEO

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \underbrace{(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})}_{A^i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è IDENTICO a m volte

$$A^1x = 0 \quad A^2x = 0 \quad \dots \quad A^mx = 0$$

I eq. II eq. m-esima eq.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = 0$$

A_i ↑ colonne

$(*)\ \sum_1^n x_i A_i = 0 \qquad A_i \in \mathbb{R}^n$ (sistema quadrato)

Teorema Le righe $A^1, A^2, \dots, A^n$ del sistema $(*)$ sono indip. se e solo se lo sono le colonne.

DIM Colonne linearmente indip $\Rightarrow$ righe lo sono altrettanto.

$\sum_1^n x_i A_i = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ $\Rightarrow$ il sistema lineare omogeneo relativo ha solo la soluzione nulla $(0, 0, \dots, 0)$.

Il sistema $\sum_1^n x_i A_i = 0$ coincide col sistema $\begin{cases} A^1 x = 0 \\ A^2 x = 0 \\ \vdots \\ A^n x = 0 \end{cases}$ cioè

$x \in \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle^{\perp} \Rightarrow$ poiché $x = 0$ è l'unica soluzione del sistema

$\Rightarrow$ l'unico elemento in $\langle A^1, \dots, A^n \rangle^{\perp}$ è lo 0.

$$\mathbb{R}^n = \langle A^1, \dots, A^n \rangle \oplus \langle A^1, \dots, A^n \rangle^{\perp}$$

$$n = \dim \langle A^1, \dots, A^n \rangle + \overbrace{\dim \underbrace{\langle A^1, \dots, A^n \rangle^{\perp}}_{\{0\}}}^{=0}$$

$$\dim \langle A^1, \dots, A^n \rangle = n$$

th. generatori sono indipendenti.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathbb{R}^3$$

x_0 $\qquad$ u $\qquad$ v

$x_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ è appartenente al piano

se considero un vettore ortogonale a $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

e sia $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ l'equazione implicita sarebbe

$$\boxed{a(x-1) + b(y-2) + c(z+1) = 0}$$

u

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} (1,0,2)(a,b,c) = 0 \\ (0,1,1)(a,b,c) = 0 \end{cases}}$$

v

Basta calcolare un qualunque $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\perp$ tale che

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \langle u, v \rangle$$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2c \\ b = -c \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a = parametro

$$-2(x-1) - (y-2) + (z+1) = 0$$

forma implicita del piano dato.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Voglio che

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \right] \begin{matrix} (1,0,0) = 0 \\ (1,0,1) = 0 \end{matrix}$$

$$[\ \ ] = \begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta \\ 1 \\ 3-\beta \end{pmatrix}$$

$$0 = [\ \ ](1,0,0) = 1-\alpha-\beta$$

$$0 = [\ \ ](1,0,1) = 1-\alpha-\beta+3-\beta = 4-\alpha-2\beta$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha+\beta \\ 4 = \alpha+2\beta \end{cases}$$

$$\alpha = 1-\beta$$

$$4 = 1-\beta+2\beta = 1+\beta$$

La soluzione del sistema $\boxed{\beta = 3 \quad \alpha = -2}$

$$x_{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$ è la proiezione cercata.

$$x_{\langle u_1 \dots u_n \rangle} = \sum_1^n \alpha_i u_i$$

dove $\alpha_1 \dots \alpha_n$ soluzione il sistema $\boxed{x - x_{\langle u_1 \dots u_n \rangle} u_j = 0 \ \forall j = 1 \dots n}$

$$\left[x - \sum_{1}^{n} \alpha_i \cdot u_i \right] u_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots n$$