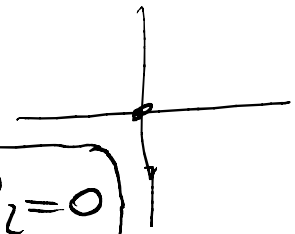
Note Title 11/20/2020

$$\sum_1^n X_i = \bigoplus_1^n X_i$$

$$x_i \in X_i, \quad \sum_1^n x_i = 0 \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$



$$\boxed{\alpha e_1 + \beta e_2 = 0}$$

$$X_1 = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle \quad X_2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \quad X_3 = \langle w_1, \dots, w_p \rangle$$

$$X_1, X_2, X_3 \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = \langle u_1 \dots u_m, v_1, \dots, v_n, w_1 \dots w_p \rangle$$

$$\underbrace{x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2, \ x_3 \in X_3, \ \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0}} \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x_1 \in X_1 \iff \exists \alpha_i : x_1 = \sum_1^m \alpha_i u_i$$

$$x_2 \in X_2 \iff \exists \beta_j : x_2 = \sum_1^n \beta_j v_j$$

$$x_3 \in X_3 \iff \exists \gamma_k : x_3 = \sum_1^p \gamma_h w_h$$

$$\overbrace{\underbrace{\sum_1^m \alpha_i u_i}_{x_1} + \underbrace{\sum_1^n \beta_j v_j}_{x_2} + \underbrace{\sum_1^p \gamma_h w_h}_{x_3}} = 0$$

Si risolve il sistema lineare

$$\begin{array}{c|c} \alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_n \gamma_1 \dots \gamma_p & \\ \hline u_1 \dots u_m v_1 \dots v_n w_1 \dots w_p & 0 \end{array}$$

Se, per OGNI soluzione $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_m \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_p$ si verifica che

$$\sum_1^m \bar{\alpha}_i u_i = 0 \quad \sum_1^n \bar{\beta}_j v_j = 0 \quad \sum_1^p \bar{\gamma}_h w_h = 0$$

allora la somma è DIRETTA

Th Se la somma di $X_1 \dots X_n$, sottospazi di Y, è diretta

T $$\underbrace{\dim \bigoplus_1^n X_i}_{} = \sum_1^n \dim X_i$$

DIM. $n=3$

$\rightarrow$ $u_1, \dots, u_m$ base di $X_1 \Rightarrow \dim X_1 = m$

$v_1, \dots, v_n$ base di $X_2 \Rightarrow \dim X_2 = n$

$w_1 \dots w_p$ base di $X_3 \Rightarrow \dim X_3 = p$

$$X_1 + X_2 + X_3 = \langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_p \rangle$$

Proviamo che, se la somma è diretta allora i generatori sono indipendenti, da cui la tesi perché il loro numero è $m+n+p$.

Per provare l'indip. di u_i, v_j, w_h (tutti insieme)

<u>Comb. nulla</u>

$$\underbrace{\boxed{\sum_1^m \alpha_i u_i}}_{x_1 \in X_1} + \underbrace{\boxed{\sum_1^n \beta_j v_j}}_{x_2 \in X_2} + \underbrace{\boxed{\sum_1^p \gamma_h w_h}}_{x_3 \in X_3} = 0 \quad \left(\overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i, \beta_j, \gamma_h = 0 \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{x_1}_{\in X_1} + \underbrace{x_2}_{\in X_2} + \underbrace{x_3}_{\in X_3} = 0$$

$\xrightarrow[\text{somma diretta}]{\text{Bisnéla}}$ $\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = 0}$ $\boxed{x_3 = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_1^m \alpha_i u_i = 0}$ $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1..m$

u_i sono indip.

lo stesso per x_2 e x_3 $\Rightarrow \beta_j = 0$, $\gamma_h = 0$

$\blacksquare$

$$\boxed{\dim \sum_1^n X_i = \sum_1^n \dim X_i} \Rightarrow \sum_1^n X_i = \bigoplus_1^n X_i$$

<u>DIM.</u> $n = 3$

$$X_1 + X_2 + X_3 = \langle \overbrace{u_1, \dots, u_m}^{\text{base di } X_1}, \overbrace{v_1, \dots, v_n}^{\text{base di } X_2}, \overbrace{w_1, \dots, w_p}^{\text{base di } X_3} \rangle$$

I generatori trovati sono $\underset{\dim X_1}{m} + \underset{\dim X_2}{n} + \underset{\dim X_3}{p}$

$$m + n + p = \dim(X_1 + X_2 + X_3)$$

$u_1 \dots u_m, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_p$ sono generatori di $X_1 + X_2 + X_3$

in numero pari alla sua dimensione.

Per il th. generatori sono indipendenti e quindi sono una base.

La tesi segue dal lemma di ripartizione delle basi.

Quindi CNS perché la somma di $X_1 \dots X_n$ sia diretta è che

$$\boxed{\dim \sum_1^n X_i = \sum_1^n \dim X_i}$$

Th. di G Grassmann sui sottospazi.

Sia Z di dim. finita e siano X, Y sottospazi di Z.

$\boxed{\text{AL\_3.5}}$

Allora

$$\dim(X+Y)+\dim(X\cap Y)=$$
$$=\dim X+\dim Y$$

DIM. Se $\overbrace{X\cap Y=\{0\}}^{\dim(X\cap Y)=0}$ $\Rightarrow X+Y=X\oplus Y$

$\Rightarrow \dim(X+Y)=\dim X+\dim Y \Rightarrow$ tesi.

Se $\dim X\cap Y=k$ $\begin{cases}\dim X=n\\ \dim Y=m\end{cases}$, sia $w_1\dots w_k$ una base di $X\cap Y$

Siano $\underline{w_1, w_2, \dots, w_k, x_{k+1} \dots x_n}$ base di X e

$\underline{w_1, w_2, \dots, w_k, y_{k+1} \dots y_m}$ base di Y, ottenute

completando (in X e in Y) la base $w_1 \dots w_k$.

$$\underbrace{\dim(X+Y)}_{} + \underset{\dim X \cap Y}{k} = \underset{\dim X}{n} + \underset{\dim Y}{m}$$

$$\boxed{X+Y = \underbrace{\langle \underbrace{w_1, \dots, w_k}_{k}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{n-k}, \underbrace{y_{k+1}, \dots, y_m}_{m-k} \rangle}_{n+m-k}}$$

quindi, la tesi è provata se si dimostra che sono indipendenti: $w_1 \dots w_k \; x_{k+1} \dots x_n \; y_{k+1} \dots y_m$

perché in tal caso $\dim(X+Y) = m+n-k$.

Per provare l'indipendenza siano $\alpha_i, \beta_j, \gamma_h$ tali che

$$\underbrace{\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i}_{w} + \underbrace{\sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_{k+1}^{m} \gamma_h y_h}_{y} = 0$$

$$w + x + y = 0 \Rightarrow \underbrace{w + x}_{\in X} = \underbrace{-y}_{\in Y} \Rightarrow y \in X \cap Y$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(w+y)}_{\in X \cap Y} + x = 0 \qquad \in \underbrace{\langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle}$$

perché $w, y \in X \cap Y$

$\in \underbrace{\langle w_1, \dots, w_k \rangle}$

Dal Lemma di ripartizione della base $w_1 \dots w_k\, x_{k+1} \dots x_n$ di X la somma degli spazi $\langle w_1 \dots w_k \rangle$, $\langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$ è diretta e quindi

$$(w+y) + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \qquad w + x + y = 0 \Rightarrow w + y = 0$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^{m} \gamma_h y_h = 0}$$

$$\underbrace{\sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j = 0}$$

$\Downarrow$ indip. di $x_{k+1} \dots x_n$

$$\beta_j = 0 \quad \forall j = k+1 \dots n$$

$\Downarrow$ per l'indipendenza di $w_1 \dots w_k y_{k+1} \dots y_m$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$$

$$\gamma_h = 0 \quad \forall h = k+1 \dots m$$

$$\underline{X \subseteq Y} \qquad X + Y = Y \qquad X \cap Y = X$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(X+Y) + \dim X \cap Y = \dim Y + \dim X$$

COMPLEMENTO ORTOGONALE AL_2.6

X sottospazio di Y

$$X^{\perp}_{Y} = \{ \underline{\underline{w \in Y}} : \underline{w x = 0} \quad \forall x \in X \}$$

abbreviato in $X^{\perp}$

$$\boxed{X^{\perp} \text{ è un sottospazio di } Y}$$

$$w, w' \in X^{\perp} \overset{?}{\Longrightarrow} w + w' \in X^{\perp}$$

$$\lambda \in \mathbb{R},\ w \in X^{\perp} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda w \in X^{\perp}$$

$$\begin{array}{l} w x = 0 \quad \forall x \in X \\ w' x = 0 \quad \forall x \in X \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} w x + w' x = 0 \\ (w + w') x = 0 \end{array} \quad \forall x \in X$$

$w \in X^\perp \Rightarrow wx = 0 \quad \forall x \in X$

$(\lambda w)x = \lambda(wx) = 0 \quad \forall x \in X$

$$\boxed{\dim(X + X^\perp) = \dim Y} \quad ?$$

LEMMA La somma di X e $X^\perp$ è diretta.

<u>dim.</u> Basta provare che

$$X \cap X^\perp = \{0\}$$

Sia $w \in X \cap X^\perp$

$$\underbrace{\boxed{w}}_{\in X^\perp}\underbrace{\boxed{w}}_{\in X} = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0} \quad \text{ok}$$

$$\dim(X + X^\perp) = \dim X + \dim X^\perp$$

$$X \oplus X^{\perp} = Y$$

1) $X + X^{\perp} = Y$

2) già verificata perché $X \cap X^{\perp} = \{0\}$.

$$\forall y \in Y \qquad y = \underbrace{y - y_X}_{\perp X} + \underbrace{y_X}_{\in X}$$

y_X verifica, per definizione

$$y - y_X \perp X \Longrightarrow \boxed{y - y_X \in X^{\perp}}$$

$$\forall y \ \exists\, y_X \in X \ e \ (y - y_X) \in X^{\perp} : \ y_X + (y - y_X) = y$$

quindi $\boxed{Y = X + X^{\perp}}$

Poiché $Y = X \oplus X^{\perp}$ ne segue anche

$$\dim Y = \dim X + \dim X^{\perp}$$

AL_2.6
