Note Title 11/19/2020

PROIEZIONE SU UNO SPAN ARBITRARIO

$$x_{<u_1,\dots,u_n>} = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad \text{ove } \alpha_i \text{ verificano il sistema lineare}$$

$$\left[x - \sum_1^n \alpha_i u_i\right] u_j = 0 \qquad \forall j = 1 \dots n$$

Questo sistema è risolubile?

Quante soluzioni ha?

($\alpha_1 .. \alpha_n$ sono le incognite)

$$x u_j = \sum (u_i u_j) \alpha_i$$

I coefficienti del sistema lineare sono

α_1	α_2		α_n	
$u_1 u_1$	$u_1 u_2$	$\cdots$	$u_1 u_n$	$u_1 x$
$u_2 u_1$	$u_2 u_2$	$\cdots$	$u_2 u_n$	$u_2 x$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_n u_1$	$u_n u_2$	$\cdots$	$u_n u_n$	$u_n x$

Matrice di GRAM → $\{u_i u_j\}$

LEMMA

Le colonne del sistema di GRAM sono indipendenti se lo sono i vettori $u_1 .. u_n$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 u_1 \\ u_2 u_1 \\ \vdots \\ u_n u_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_2 u_2 \\ \vdots \\ u_n u_2 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} u_1 u_n \\ u_2 u_n \\ \vdots \\ u_n u_n \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_i = 0$ $\forall i$?

$\Leftrightarrow$

$\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} u_1 \sum_1^n \lambda_i u_i \\ u_2 \sum_1^n \lambda_i u_i \\ \vdots \\ u_n \sum_1^n \lambda_i u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} u_1 \sum_1^n \lambda_i u_i = 0 \\ \vdots \\ u_n \sum_1^n \lambda_i u_i = 0 \end{cases} \quad \in \mathbb{R}^n$$

Moltiplic. la prima per λ_1, la seconda per λ_2 ... l'ultima per λ_n e sommando membro a membro, si ottiene

$$\rightarrow \underbrace{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)}_{\sum_1^n \lambda_i u_i} \sum_1^n \lambda_i u_i = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_1^n \lambda_i u_i = 0 \in \mathbb{R}^n}$$

Poiché $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti per ipotesi

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0}$$

DUNQUE, se $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti, le colonne del sistema di GRAM sono indipendenti e, essendo n, sono una base per $\mathbb{R}^n$, e quindi il sistema ha una unica soluzione $\forall b \in \mathbb{R}^n$

Th. Unicità Sia $x \in X$ spazio euclideo di dim. finita. e $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ un sottospazio arbitrario di X. Allora se v e w verificano

$$\boxed{(x - v)\, u_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots k}$$

$$\boxed{(x - w)\, u_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots k}$$

allora $v = w$

Dim. Sottraendo alla j-esima equazione del I sistema (quello di v) la corrispondente equazione del II (w) e mettendo in evidenza u_j si ottiene

$$\big[(x - v) - (x - w)\big] u_j = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{[w - v]\, u_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots k}$$

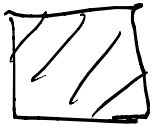
w, v sono elementi di $\langle u_1 \dots u_k \rangle$ e dunque $w - v$ lo è.

$w - v$ è ortogonale a $\langle u_1 \dots u_k \rangle$

$$\boxed{(w-v)z = 0 \quad \forall z \in \langle u_1 \dots u_k \rangle}$$

Scegliendo $z = w - v \in \langle u_1 \dots u_k \rangle$

$$(w-v)(w-v) = 0 \Rightarrow w - v = 0 \Rightarrow \boxed{w = v}$$



è unico

$$\boxed{\pi_{\langle u_1, \dots, u_n \rangle}}$$

se $u_{i_1} \dots u_{i_k}$ sono una base di $\langle u_1 \dots u_n \rangle$ estratta da $u_1 \dots u_n$

$\langle u_1 \dots u_n \rangle = \langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle$

Per il th. precedente esiste $\boxed{\pi_{\langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle}} \in \langle u_{i_1} \dots u_{i_n} \rangle = \boxed{\langle u_1 \dots u_n \rangle}$

$$\left[x - x_{\langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle}\right] u_j = 0 \qquad \forall j = i_1 \dots i_k$$

w

$u_j \in \langle u_{i_1} \dots u_{i_k} \rangle \Rightarrow \quad w u_{i_h} = 0 \quad \forall h = 1 \dots k$

$$w u_j = w \underbrace{\left[\sum_1^k \beta_{i_h} u_{i_h}\right]}_{u_j} = \sum_1^k \beta_{i_h} \underbrace{w u_{i_h}}_{=0 \ \forall h = 1 \dots k}$$

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sottospazi di Y

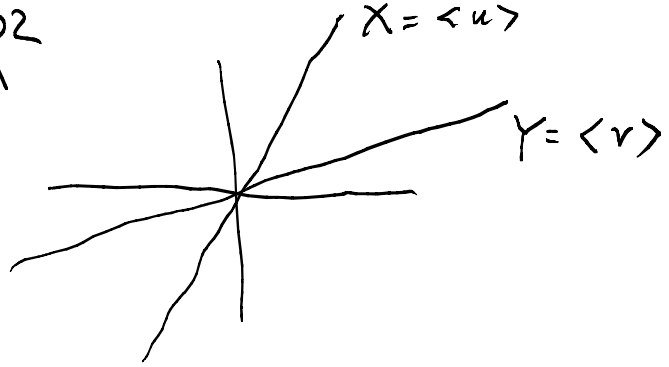
$$\sum_1^n X_i = \{ y \in Y : \exists\, x_1 \in X_1, \dots, \underline{x_i \in X_i}, \dots x_n \in X_n \quad y = \sum_{i=1}^n x_i \}$$

Lo spazio somma $\sum_{i=1}^n X_i$ si dirà SOMMA DIRETTA

se $\sum_1^n x_i = 0$ con $x_i \in X_i \ \forall i \implies x_i = 0 \ \forall i = 1..n$.

e lo denoterò con $\bigoplus_{i=1}^n X_i$.

$\mathbb{R}^2$



Se U e V sono indipendenti (non allineati)

allora la somma è diretta

$$x \in X \Rightarrow \exists \alpha : \; x = \alpha u$$

Scelti

$$y \in Y \Rightarrow \exists \beta : \; y = \beta v$$

Supponiamo che $x + y = 0 \iff \alpha u + \beta v = 0$ e, essendo u, v indipendenti, ne segue $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, da cui $x = 0$ e $y = 0$

Se invece $u = \gamma v$, $\boxed{u \neq 0 \quad v \neq 0 \quad \gamma \neq 0.}$

$x = u \in \langle u \rangle = X$ $\quad y \in -\gamma v \in \langle v \rangle = Y$

La somma $x + y = 0$ non è diretta $x, y \neq 0$

CNS perché la somma di X_i, $i=1..n$, sia DIRETTA, è che

$$\forall x \in \sum_1^n X_i \quad (\text{tale che } x = \sum_1^n x_i, \ x_i \in X_i)$$

la scelta degli addendi x_i è UNICA, cioè

$$\underline{x} \qquad x = \sum_1^n x_i \quad \text{e} \quad x = \sum_1^n x_i' \qquad x_i, x_i' \in X_i$$

$$\underline{\text{allora}} \qquad x_i = x_i'$$

---

la somma di X_i è diretta $\Longrightarrow$ UNICITÀ della decomposizione.

$$x = \sum x_i \qquad x = \sum x_i'$$

sottraendo $\Longrightarrow$

$$0 = \sum (x_i - x_i') \qquad \in X_i$$

somma diretta $\Longrightarrow$

$$x_i - x_i' = 0 \qquad x_i = x_i' \qquad \forall i = 1..n$$

UNICITÀ $\Longrightarrow$ SOMMA DIRETTA

$x_i \in X_i$
$\forall i = 1..n$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \not\Longrightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1..n$

$\| \quad \| \quad \|$

$0 + 0 + \dots + 0 = 0$

Il vettore 0 ha due decomposizioni in somme di addendi nei singoli spazi. Per l'unicità gli addendi delle due decomposizioni devono coincidere.

CNS perché $X + Y = X \oplus Y$ è che $X \cap Y = \{0\}$

$X \oplus Y \underset{\text{C.N.}}{\Longrightarrow} X \cap Y = \{0\}$

$w \in X \cap Y$

$w = w + 0$
$\in X \quad \in Y$
$\| \quad \|$
$w = 0 + w$
$\in X \quad \in Y$

$\Longleftarrow$ $w = 0$

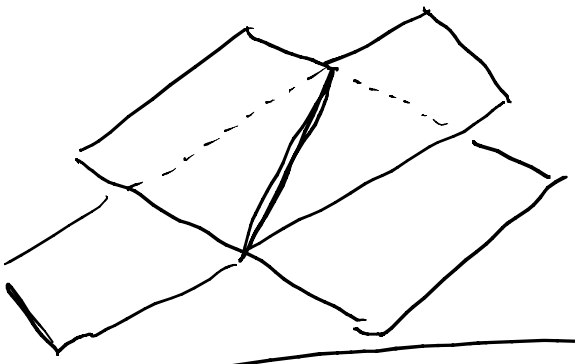
$X \oplus Y \Longleftarrow X \cap Y = \{0\}$

TS C.S Hp

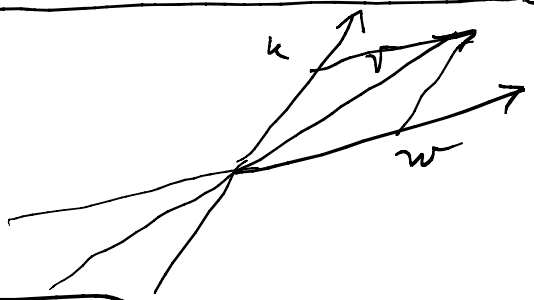
$x \in X, \ y \in Y, \ x+y=0 \not\Longrightarrow x=y=0$

$x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \Longrightarrow x,y \in X \cap Y \Longrightarrow x=0, \ y=0$

$\in X \quad \in Y$



u, v, w combinazione non nulla



$X = \langle u \rangle \quad Y = \langle v \rangle$

$Z = \langle w \rangle$

$X \cap Y \cap Z = \{0\}$

IL TH. E' FALSO SE GLI SPAZI SONO PIU' DI DUE

$v = \alpha u + \beta w$

$\alpha u + \beta w - v = 0$

$\neq 0 \quad \neq 0 \quad \neq 0$

$X \oplus Y$ $\quad Y \oplus Z$ $\quad X \oplus Z$

$X + Y + Z$ NON È' DIRETTA

LEMMA DI RIPARTIZIONE DELLA BASE

X, $u_1 \dots u_n$ base X.

$$Y = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \qquad Z = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$$

Allora $\quad Y + Z = Y \oplus Z$

$y \in Y$
$z \in Z$
$y + z = 0$

$y \in Y \Rightarrow \exists \alpha_i : y = \sum_1^k \alpha_i u_i$

$z \in Z \Rightarrow \exists \beta_j : z = \sum_{k+1}^n \beta_j u_j$

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{k+1}^{n} \beta_j u_j = 0$$

y $\qquad$ z

per l'indip. di $u_1 u_2 \dots u_k u_{k+1} \dots u_n$

allora $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots k$

$\beta_j = 0 \ \forall j = k+1 \dots n$

e quindi anche $y = \sum_{1}^{k} \alpha_i u_i = 0$ e $z = \sum_{k+1}^{n} \beta_j u_j = 0$

o o o

o o o

o o o