Note Title 11/17/2020

$u_1, \dots, u_n$ sono INDIPENDENTI se e solo se **DEFIN.**

$$\sum_1^n \alpha_i u_i = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$u_1, \dots, u_n$ sono DIPENDENTI se e solo se

$\exists\, \underline{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ NON TUTTI NULLI tali che $\sum_1^n \alpha_i u_i = 0$

<u>CNS</u> $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti se e solo se nessuno d'essi è combinazione degli altri

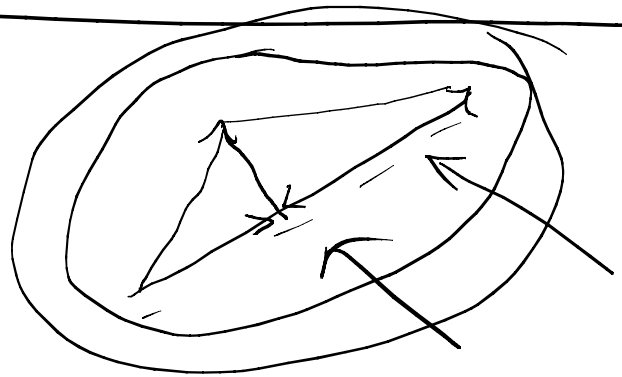
Sono dipendenti se almeno uno è combinazione degli altri, cioè

$\exists j \quad \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad :$

$$u_j = \underbrace{\sum_{i \neq j} \alpha_i u_i}_{\text{combinazione lineare degli altri}}$$

uno

$$|x+y|^2 \leq \left(|x| + |y|\right)^2$$



$$\cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2}xy \overset{?}{\leq} \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2}|x||y|$$

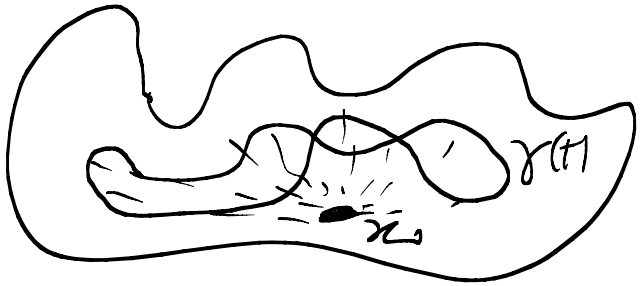
$$xy \leq |xy| \underset{\text{Schwarz}}{\leq} |x||y|$$

Ω si dice SEMPLICEM. CONNESSO se

<u>ogni</u> curva chiusa in Ω ($\gamma : [0,1] \to \Omega$ continua con $\gamma(0) = \gamma(1)$)

è omotopa (deformabile) in una curva costante

$\sigma(t) = x_0 \quad \forall t \in [0,1]$



$\gamma : [0,1] \to \Omega$ è omotopa in Ω a $\sigma : [0,1] \to \Omega$ se

$\exists\, h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua tale che $h(0,t) = \gamma(t)$

$h(1,t) = \sigma(t)$

$A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^N$

$A_1 \dots A_n$ sono indipendenti

$$\boxed{\sum_1^n x_i A_i = 0} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

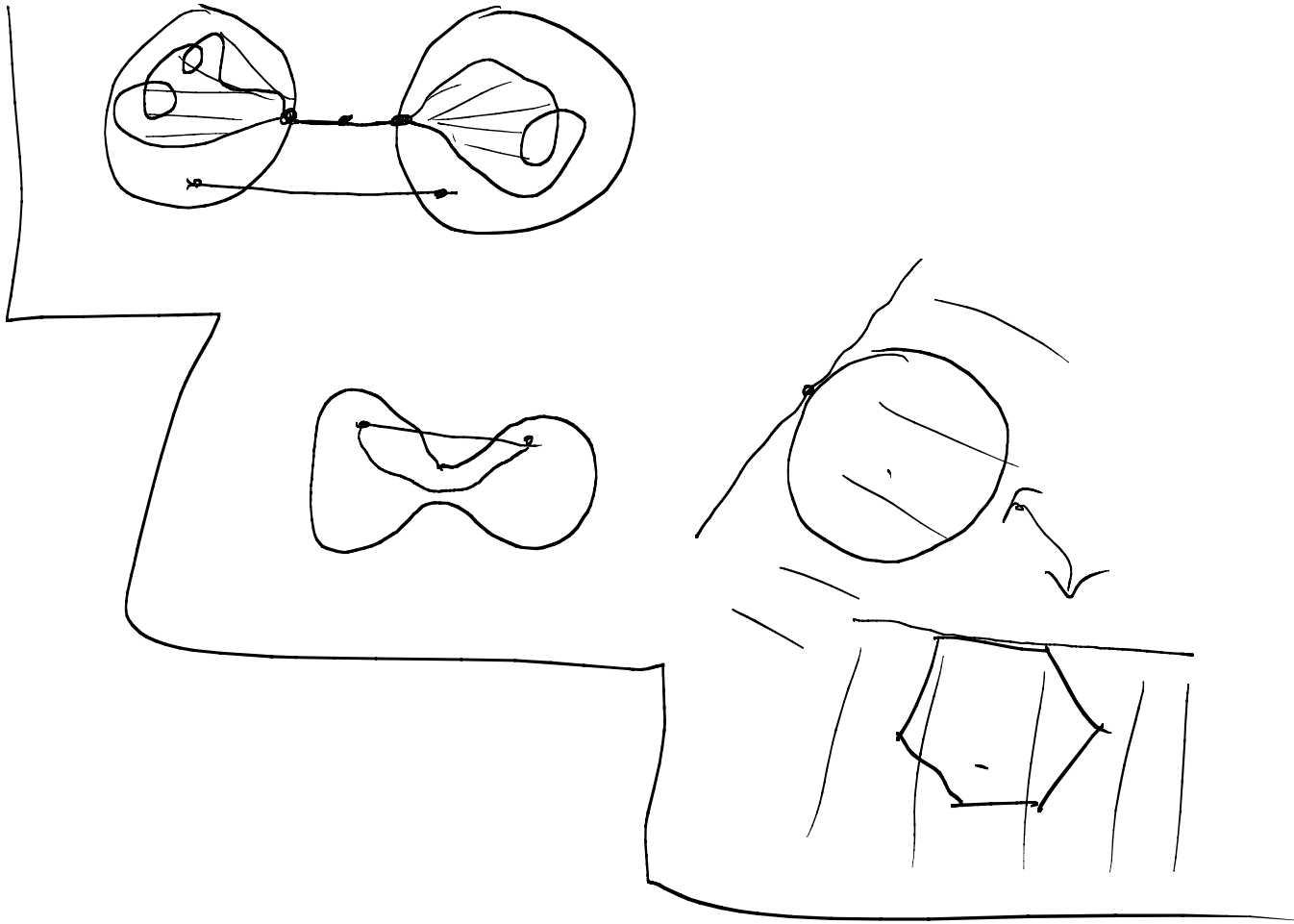
$$\Vert$$

$$\boxed{\begin{array}{c|c} x_1\ x_2 \dots x_n & \\ \hline A_1\ A_2 \dots A_n & 0 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 2 & 0 & \mathrm{I} \\
2 & 0 & 4 & \mathrm{II} \\
1 & -1 & 3 & \mathrm{III} \\
\hline
1 & 0 & 2 & \mathrm{II}/2 \\
0 & -2 & 2 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
0 & 1 & -1 & \mathrm{II}/(-2) \\
0 & -3 & 3 & \mathrm{III} - 2 \\
0 & 1 & -1 & \mathrm{III}/(-3) \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\mathrm{III} - \mathrm{II}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 \\
\wedge & \wedge &
\end{array}$$



$a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1n}$

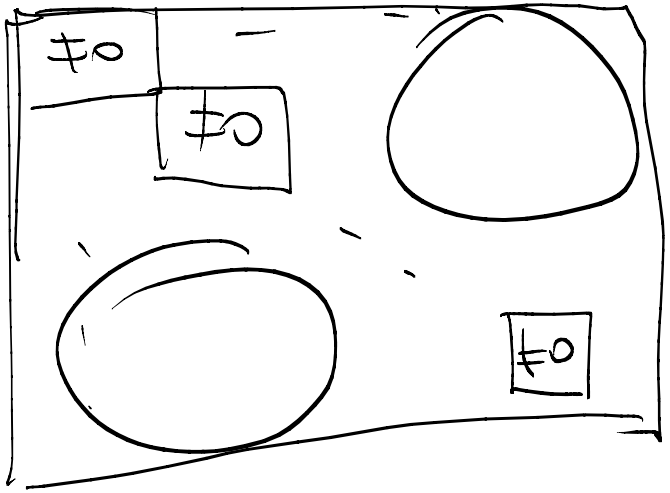
$\vdots$

$a_{n1} \quad a_{n2} \cdots a_{nn}$

<u>coefficienti del sistema</u>

sistema quadrato $(m=n)$

$$\boxed{a_{ij} = \begin{cases} \neq 0 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}}$$



$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{matrix}$$

<u>particolari</u>

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_3 = 3}}$$

$\Downarrow$ sostituendo x_3 nelle altre equazioni

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 1 \\ -x_2 + 2\cdot 3 &= 2 \end{aligned}} \\ \underline{\underline{3 = 3}} \end{cases} \Longrightarrow x_2 = 4$$

sostituendo nella I

$$x_1 + 2\cdot 4 = 1 \Rightarrow x_1 = -7$$

$$\boxed{\text{SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO}}$$

GAUSS-JORDAN

x_1	x_2	x_3		
1	2	0	1	
0	−1	2	2	II
0	0	1	3	III
0	−1	0	−4	II − 2III
0	1	0	4	II(−1)
1	0	0	−7	I − 2II

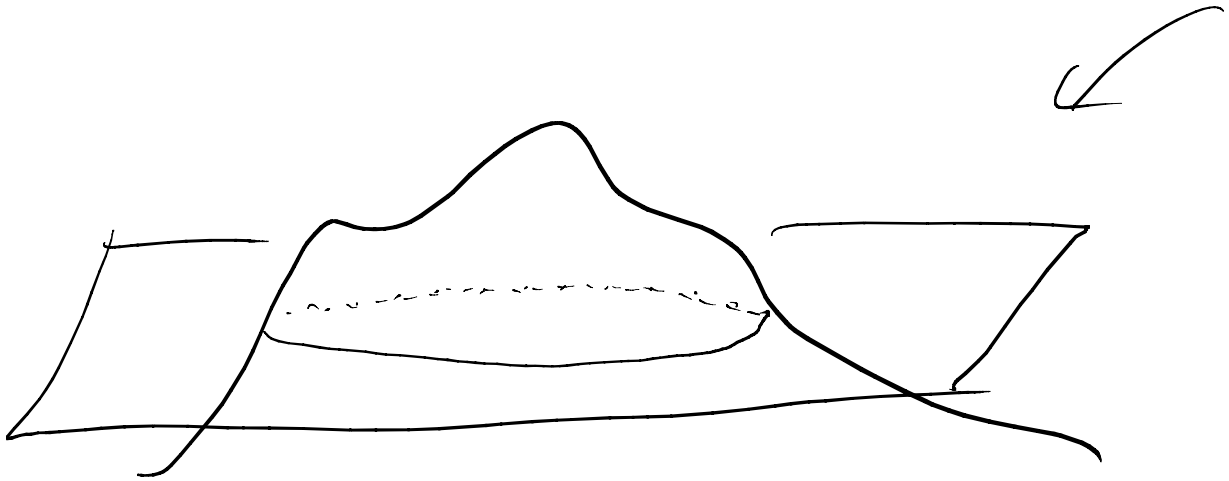
$x_1 = -7 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2x_1 = 1$$
$$3x_2 = 7$$
$$-x_3 = 4$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{matrix}$$

$$-x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = -4$$

$$ax = b$$
$$a \neq 0$$
$$x = \frac{b}{a}$$



$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\{f = k\}$ $k \in \mathbb{R}$

$\shortparallel$

Insieme di livello k $\underbrace{\{x \in \Omega : f(x) = k\}}$

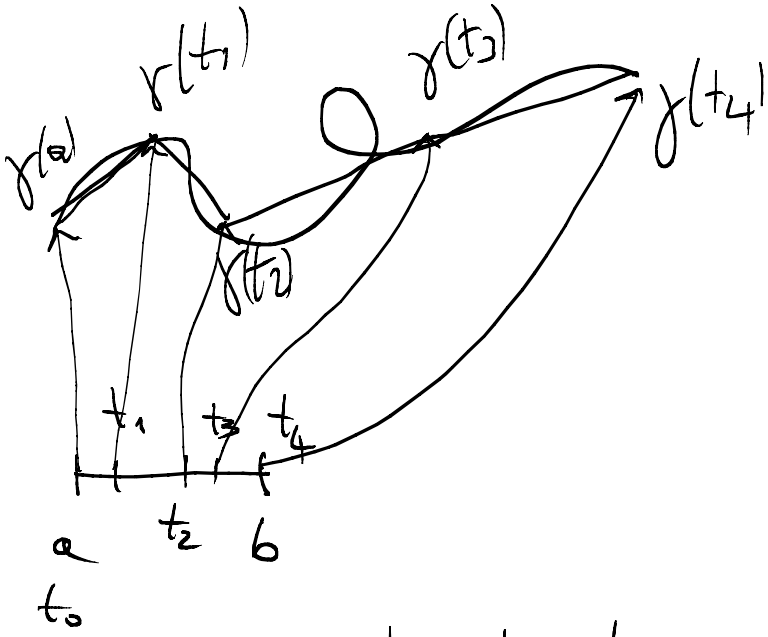
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile se

$\sup_{\Pi} \Lambda(\Pi) < \infty$ Π è una partizione di $[a,b]$ e $\Lambda(\Pi)$ è la lunghezza della poligonale ad essa relativa

Una partizione Π di $[a,b]$ è una sequenza finita di punti $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a,b]$ tali che

$$\boxed{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b}$$

$$\boxed{\Lambda(\Pi) = \sum_{0}^{n-1} \left| \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \right|}$$



$$\underset{\substack{\| \\ a}}{t_0} < t_1 < t_2 < t_3 < \underset{\substack{\| \\ b}}{t_4}$$

X, Y sottospazi di Z

$$X + Y = \{ w \in Z : \exists\, x \in X,\ y \in Y : w = x + y \}$$

$$X \cap Y = \{ w \in Z : w \in X \text{ e } w \in Y \}$$

$X \subseteq Y$ se $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$

$X = Y$ se $\forall x \in X,\ x \in Y,\ \forall y \in Y\ y \in X$

cioè se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

$$Z = \mathbb{R}^n$$

$$X = \langle u_1 \dots u_n \rangle \qquad X + Y = \langle u_1 \dots u_n, v_1, \dots, v_m \rangle$$

$$Y = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

$$\boxed{X \cap Y} \qquad \{ w : \underbrace{w \in X}_{\exists \alpha_i :\ w = \sum_1^n \alpha_i u_i}, \ \underbrace{w \in Y}_{\exists \beta_j\ w = \sum_1^m \beta_j v_j} \}$$

AL_1.2 ?

$$\boxed{\sum_1^n \alpha_i u_i = \sum_1^m \beta_j v_j} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c|c} \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n\ \beta_1 \dots \beta_m & \\ \hline u_1\ u_2\ \ u_n\ -v_1\ -v_m & 0 \end{array}}$$

da risolvere

Per ogni soluzione $\bar{\alpha}_1, \dots \bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_m$ ottengo un punto $w \in X \cap Y$ ponendo $w = \sum_1^n \bar{\alpha}_i u_i = \sum_1^m \bar{\beta}_j v_j$

$a, b \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq |a+\lambda b|^2 = (a+\lambda b)(a+\lambda b) =$$

$$= \underbrace{|a|^2 + \lambda^2 |b|^2 + 2\lambda ab}_{a \cdot a}$$

trinomio di II grado in λ.

$$|b|^2 \lambda^2 + 2ab\lambda + |a|^2 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \longrightarrow \frac{\Delta}{4} = b^2 - ac$$

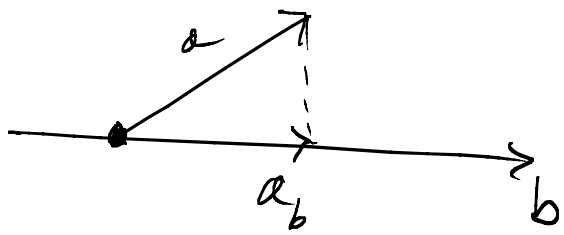
$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$(ab)^2 - |a|^2 |b|^2 \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{|ab| \leq |a||b|}$$ SCHWARZ

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall a \in \mathbb{R}^n \quad \forall b \neq 0 \\ |a_b| \leq |a| \\ \text{SCHWARZ GEOMETRICA}\end{array}}$$

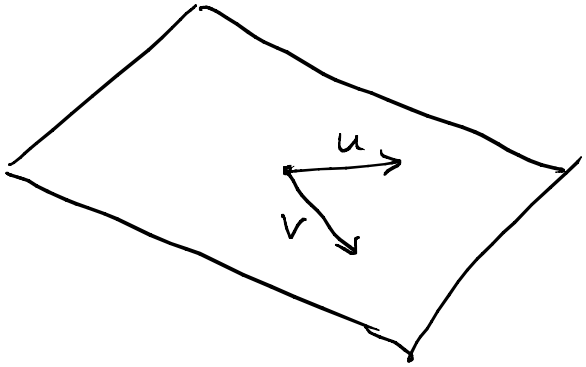


$$|a|^2 = |\underbrace{a - a_b}_{\perp b} + \underbrace{a_b}_{\parallel b}|^2 \underset{\text{Pitagora}}{=} \overbrace{|a - a_b|^2}^{\geq 0} + |a_b|^2 \geq |a_b|^2$$

$$|a_b| = \left|\underbrace{\frac{ab}{|b|^2}}_{\mu} \cdot b\right| = \underbrace{\frac{|ab|}{|b|^{\cancel{2}}}\cancel{|b|}}_{|\mu||b|} \Rightarrow \frac{|ab|}{|b|} \leq |a| \quad \text{SCHWARZ}$$

$$\boxed{\text{AL\_2.1}}$$

$$ax + by + cz = 0$$



$a \neq 0 \quad y = 1 \quad z = 1 \quad ax + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{a}$$

$$\left(-\frac{2}{a}, 1, 1\right)$$

Se $b = 0$ e $c = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ non appaiono y e z e si scelgono ad arbitrio.

$$\underbrace{(0, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1)}_{\text{non multipli}}$$

Se $b \neq 0$ allora

$x = 1;\ z = 1$

$by + a + c = 0$

$$y = \frac{-a-c}{b}$$

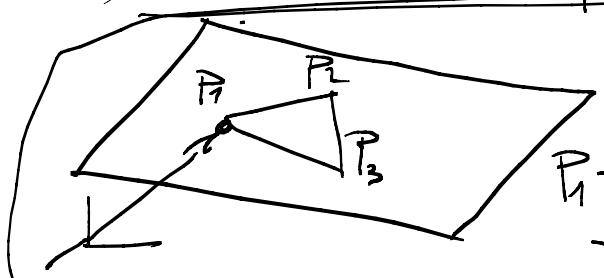
altrimenti si fa lo stesso ragionamento rispetto a t.

$2x + y - z = 0$ $\quad$ $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(\frac{1}{2},0,1)$

$y=1 \quad z=1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

$y=0 \quad z=1 \Rightarrow 2x-1=0 \quad x=\frac{1}{2}$

$P_1=(0,0,0) \quad P_2=(0,1,1) \quad P_3=(\frac{1}{2},0,1)$ sono tre punti non allineati del piano



$P_1+\alpha\underbrace{(P_2-P_1)}_{u}+\beta\underbrace{(P_3-P_1)}_{v}$

$u = P_2 - P_1 = (0,1,1)-(0,0,0)$

$v = P_3 - P_1 = (\frac{1}{2},0,1)-(0,0,0)$

$\Rightarrow$ piano è $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$2x + y - z = 3$$

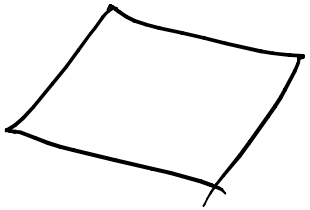
3 punti

$$y = z = 0 \Rightarrow 2x = 3 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$x = y = 0 \Rightarrow z = -3$$

$$\boxed{\begin{matrix} \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right) \\ (0, 3, 0) \\ (0, 0, -3) \end{matrix}}$$



$$u = (0, 3, 0) - \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$$

$$v = (0, 0, -3) - \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right) + \alpha u + \beta v$$

$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è esatta o integrabile se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ (potenziale primitiva)

tale che

$$df \equiv \alpha \text{ su } \Omega \times \mathbb{R}^n$$

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\Lambda(\text{graph } f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Lambda = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{4x+1}{x}}\, dx$$

$t^2 = x \qquad dx = 2t\, dt$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+4t^2}}{\cancel{t}}\, \cancel{2t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

$t = \sqrt{\ }$

$t = \sinh u$ - - - - - -

1) $B \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ 2) $B \neq 0$

TS. $\exists j$: $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle A_1 \dots A_{j-1}, B, A_{j+1} \dots A_n \rangle$

al posto di A_j

Scambiando B con un opportuno A_j lo span non cambia.

DIM. $B \in \langle \ \rangle \iff \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : B = \sum_1^n \alpha_i A_i$

Poiché $B \neq 0$ NON TUTTI GLI α_i possono essere nulli. Sia, per semplicità $\alpha_1 \neq 0$. Ne segue

$$B = \alpha_1 A_1 + \sum_2^n \alpha_i A_i \implies A_1 = \frac{1}{\alpha_1} B - \sum_2^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} A_i \in \langle B, A_2, \dots, A_n \rangle$$

Protože $B \in \langle A_1 \dots A_n \rangle$ zřejmě (Lemma fundam.)

$$\underbrace{\langle B, A_1, A_2, \dots A_n \rangle} = \underline{\langle A_1, \dots, A_n \rangle}$$

Protože $\underline{A_1 \in \langle B, A_2, \dots, A_n \rangle}$ (Lemma fund.)

$$= \langle B, A_1, A_2 \dots, A_n \rangle = \underline{\langle B, A_2, \dots, A_n \rangle}$$

$\boxed{AL\_3.1}$

X $\quad u_1 \dots u_n$ base di X, $v_1 \dots v_m \in X$ $\underline{m > n}$

TS: $v_1 \dots v_m$ sono dipendenti.

<u>DIM</u>.

$$v_1 \in X \Rightarrow v_1 = \sum_1^n \alpha_i u_i$$

Se $v_1 = 0$ il sistema $v_1 \dots v_m$ è già dipendente.

Altrimenti si può scambiare con uno degli u_i, e sia u_1 per semplicità. Ne segue

$$X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, u_2, \dots u_n \rangle$$

Consideriamo $v_2 \in X \Rightarrow v_2 = \beta v_1 + \sum_2^n \alpha_i u_i$

Se tutti gli α_i, $i = 2 \dots n$ fossero nulli si avrebbe $v_2 = \beta v_1$ e il sistema $v_1 \dots v_m$ sarebbe dipendente. Altrimenti, qualcuno degli α_i, $i = 2, \dots, n$ sarà $\neq 0$, e si può scambiare v_2 con il vettore

corrispondente (suppon. u_2), senza alterare lo span $= X$

$$X = \langle v_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, v_2, u_3 \dots u_n \rangle$$

Supponiamo di avere già scambiato k vettori $u_1 \dots u_k$ con altrettanti vettori v_i, per semplicità $v_1 \dots v_k$ e consideriamo

$$v_{k+1} \in X \Rightarrow \underbrace{v_{k+1} = \sum_1^k \beta_j v_j}_{} + \sum_{k+1}^n \alpha_i u_i$$

Se tutti gli α_i sono 0 v_{k+1} è combinazione di $v_1, \dots, v_k$ e quindi il sistema $v_1 \dots v_m$ è dipendente. Altrimenti, qualcuno degli $\alpha_i \neq 0$ e sia α_{k+1} e si può effettuare lo scambio ottenendo

$$X = \overbrace{\langle v_1, \dots, v_k, u_{k+1} \dots u_n \rangle} = \langle v_1 \dots v_k, v_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n \rangle$$

continuando fino a scambiare tutti gli u_i, $i=1..n$, con altrettanti vettori v_j, supp. $v_1 .. v_n$ si avrà che

$$\boxed{X = \langle v_1, \dots, v_n \rangle}$$

ne segue subito che v_j, $n+1 \leq j \leq m$, essendo elementi di X, appartengono a $\langle v_1, .., v_n \rangle$ e quindi sono combinazione di $v_1, v_2, .., v_n$. Il sistema $v_1 .. v_m$ è dunque dipendente.

$\boxed{\text{AL\_3.1}}$

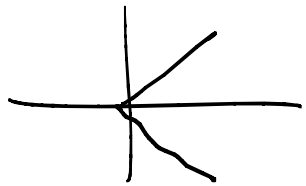
$$\rho = \sqrt{\cos 2\theta} \qquad \boxed{x \geq 0} \qquad \underline{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$2\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho = \qquad \underline{\int 1 \, dx\,dy}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \; \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} = \int_0^{\pi/4} d\theta \left(\cos 2\theta\right) = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

$\cos 2\theta > 0 \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$



se $u_1 \dots u_n$ base $\Rightarrow$ $v_1 \dots v_m$ sono dipendenti se $m > n$

se sono indipendenti $\Rightarrow m \leq n$

$$0 \equiv p(x) = \sum_{0}^{n} \alpha_i x^i$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_0 = p(0) = 0 \Rightarrow p(x) = x\, p_1(x) = x \underbrace{\sum_{1}^{n} \alpha_i x^{i-1}}_{p_1(x)}$$

$\rightarrow$ $x\, p_1(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ da cui, se $x \neq 0$ deve essere

$p_1(x) = 0 \Rightarrow p_1(x) \equiv 0 \;\; \forall x \neq 0$. $\quad p_1(0) = \lim_{x \to 0} p_1(x) = 0$ perché

il polinomio p_1 è una funzione continua

$$\alpha_1 = p_1(0) = 0$$