Note Title 11/16/2020

$u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$. Sono indipendenti?

$n < k$ sono DIPENDENTI Th. max. numero di vettori indip.

se $k \le n$

$$\sum x_i u_i = 0 \iff \boxed{u_1 \dots u_k \mid 0}$$

Sono indipendenti se il sistema $u_1 \dots u_k \mid 0$ ha come unica soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

3 vettori in $\mathbb{R}^5$

x_3	x_1	x_2	
-1	1	2	I
1	2	-1	II
1	1	3	III
0	3	0	IV
-1	-1	1	V
0	3	1	II + I
0	2	5	III + I
0	-2	-1	V − I
0	1	0	IV / 3

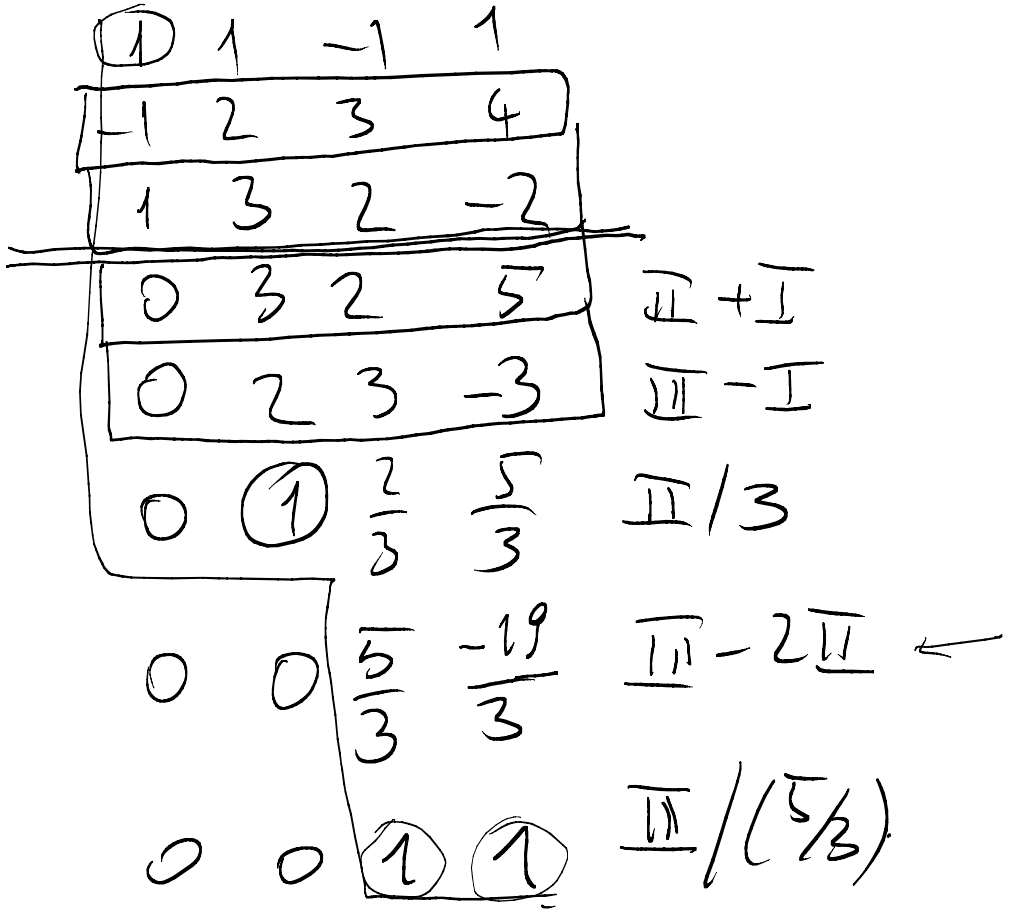
-1	1	2	I
0	1	0	II
0	3	1	IV
0	2	5	III
0	-2	-1	V
0	0	1	IV − 3II
0	0	5	III − 2II
0	0	0	III − 5IV
0	0	-1	V + 2II
0	0	0	V + IV

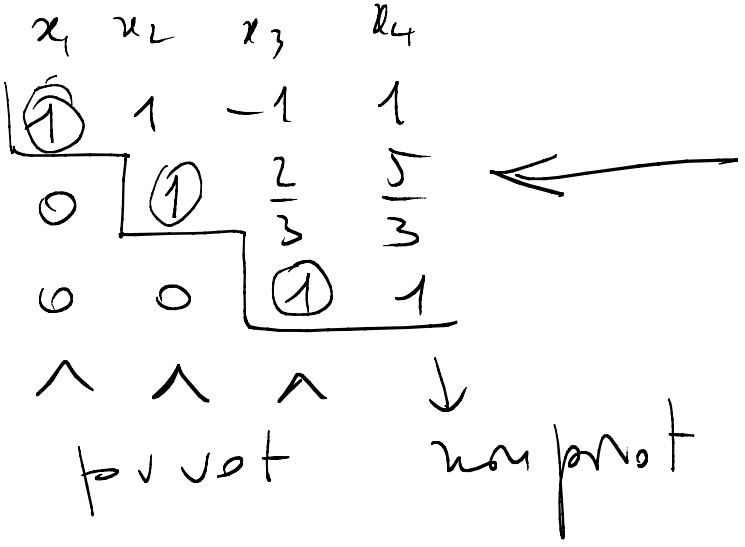
-1	1	2	I
0	1	0	II
0	0	1	IV

triangolare

ha una e una sola soluzione.

Notiamo che $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è una soluzione ovvia.





l'ultima è combinazione delle precedenti.

I vettori iniziali associati sono quelli corrispondenti alle colonne pivot

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \text{precedenti} \rangle$$

perché la IV colonna è combinazione delle prime 3. (Lemma fondamentale)

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = X \subseteq \mathbb{R}^m$$

Dopo aver soppresso tutti i vettori u_j ove j è non pivot si ottiene una base di X (perché lo spazio non cambia per il Lemma fondamentale) e in più sono indipendenti.

AL_1.1