Note Title 11/13/2020

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i = 0..n$$

PRINCIPIO D'IDENTITÀ DEI POLINOMI

$$p(0) = 0 \qquad p(0) = \alpha_0 \Longrightarrow \boxed{\alpha_0 = 0}$$

$$0 \equiv p(x) = x\left(\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}\right)$$

$$\forall x \neq 0 \Longrightarrow \underbrace{\left(\alpha_1 + \dots + \alpha_n x^{n-1}\right)}_{p_1(x)} = 0$$

poiché $\alpha_1 + \dots + \alpha_n x^{n-1}$ è una funzione continua $p_1(x)$

$$\boxed{p_1(0) = \lim_{x \to 0} p_1(x) = 0}$$

$\Rightarrow$

$$0 = p_1(0) = \alpha_1 \qquad \alpha_1 = 0$$

AL_3.1

$$p(x) = x^2 \left(\alpha_2 + \alpha_3 x + \dots + \alpha_n x^{n-2} \right)$$

Ripetendo $n+1$ volte si ha $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$

Lemma di scambio $u_1, u_2, \dots, u_n$ vettori in X e $v \in X$

1) $v \neq 0$

2) $v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$

Allora $\exists\, i \in \{1 \dots n\}$:

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle$$

Dim. Per 2) $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tale che

$$v = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad (*)$$

Almeno uno dei coefficienti $\alpha_1 \dots \alpha_n$ deve essere non nullo perché altrimenti $\sum_1^n \alpha_i u_i = 0$ mentre $v \neq 0$ per 1).

Per semplicità sia $\alpha_1 \neq 0$. Allora si ha

$$v = \alpha_1 u_1 + \sum_2^n \alpha_i u_i \iff u_1 = \frac{1}{\alpha_1} v - \sum_2^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} u_i \quad (**)$$

Da $(*)$ $v \in \langle u_1 \dots u_n \rangle$ mentre, da $(**)$ $u_1 \in \langle v, u_2, \dots u_n \rangle$

$$\langle u_1, \dots u_n \rangle = \langle v, u_1, \dots u_n \rangle = \langle v, u_2, \dots, u_n \rangle$$

n $\quad$ $n+1$ $\quad$ n

LEMMA $u_1 \dots u_n$ vettori indipendenti in X.

$v \notin \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ allora $u_1, \dots, u_n, v$ sono indipendenti

DIM. $\sum_1^n \alpha_i u_i + \beta v = 0 \Rightarrow$ $(*)$ $\alpha_i = 0 \ \forall i$, $\beta = 0$

$\beta = 0 \Rightarrow \sum_{1}^{n} \alpha_i u_i = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1..n$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \in X$; indip. $u_1 .. u_n$

se $\beta \neq 0$, da (*) segue $v = \sum_{1}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\beta}\right) u_i \Rightarrow v \in \langle u_1, .., u_n \rangle$

Teorema sul massimo numero di vettori indipendenti

Sia $u_1 \dots u_n$ una base di X e siano $v_1, \dots, v_m \in X$, con $m > n$. Allora $v_1 .. v_m$ sono DIPENDENTI!

NOTA: In uno spazio con una base di n elementi non possono esserci più di n vettori indipendenti.

Dim. Poiché $u_1 \dots u_n$ è una base di X, si ha

1) $X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

2) $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti

Si considera $v_1 \in X \Rightarrow v_1 \in \langle u_1 \dots u_n \rangle$.

Se $v_1 = 0$, il sistema $v_1 \dots v_m$ è ovviamente dipendente.

Altrimenti, per il lemma di scambio, si potrà scambiare un vettore $u_1 \dots u_n$ con v_1 ottenendo lo stesso spazio.

Supponiamo sia u_1. Si ha allora

$$X = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, u_2, \dots, u_n \rangle$$

Consideriamo $v_2 \in X = \langle v_1, u_2, \dots, u_n \rangle$

$$v_2 = \beta v_1 + \sum_2^n \alpha_i u_i$$

se $\alpha_i = 0 \ \forall i = 2, \dots, n$ si avrebbe $v_2 = \beta v_1$ e quindi

$v_1, v_2, \dots, v_m$ sono dipendenti ($v_2 = \beta v_1 + 0u_2 + 0u_3 + \dots + 0u_n$)

Altrimenti qualcuno degli α_i è $\neq 0$ e sia $\alpha_2 \neq 0$

$$v_2 = \beta v_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

risolvendo rispetto ad u_2 si ottiene che $u_2 \in \langle v_1, v_2, u_3 \dots u_n \rangle$

Lemma di scambio $\Rightarrow$ $X = \langle v_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, v_2, u_3 \dots u_n \rangle$

$X = \langle v_1, \dots, v_k, u_{k+1} \dots u_n \rangle \ni v_{k+1}$

$$v_{k+1} = \sum_1^k \beta_j v_j + \sum_{k+1}^n \alpha_i u_i$$

se tutti gli $\alpha_{k+1} \dots \alpha_n$ fossero nulli si avrebbe

$v_{k+1} = \sum_1^k \beta_j v_j$ e quindi $v_1 \dots v_m$ sarebbero dipendenti

altrimenti si continua a scambiare fino al termine dei vettori $u_1 \dots u_n$

$$X = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

$\Downarrow$

tutti i vettori v_j con $j > n$, essendo vettori di X appartengono a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e quindi $v_1 \dots v_m$ sono dipendenti.

COROLLARIO Se $v_1 \dots v_k$ sono indipendenti in X e $u_1 \dots u_n$ è una base di X allora $k \leq n$.

TEOREMA DELLA DIMENSIONE: Dato uno spazio di dimensione finita, ogni sua base ha lo stesso numero di elementi.

TALE NUMERO E' DETTO DIMENSIONE DI X

DIM. Siano $\{u_1 \dots u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ due basi di X, arbitrarie. Occorre provare che $m = n$.

Poiché $u_1 \dots u_n$ è una base di X, e $v_1 \dots v_m$ è un sistema indipendente

Per il Th. precedente $m \leq n$.

Scambiando il ruolo di $u_1 \dots u_n$ e $v_1 \dots v_m$, si ha che $v_1 \dots v_m$ è una base di X e $u_1 \dots u_n$ è un sistema di vettori indipendenti

da cui $n \leq m$ $\longrightarrow$ $\boxed{m = n}$

$\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 perché ha base canonica ha 3 vettori

$\mathbb{R}^n$ ha dimensione n
$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

perché lo spazio dei polinomi di grado max N ha dimensione $N+1$ perché $1, t, \dots, t^N$ sono $N+1$ generatori indipendenti

TEOREMA DEI GENERATORI:

In uno spazio X di dimensione n

a) un insieme di (n) vettori indipendenti genera X.

b) un insieme di (n) generatori di X è formato da vettori indipendenti.

DIM:

a) Per assurdo: siano $u_1 .. u_n$ indipendenti, e sia $v \in X$ $v \notin \langle u_1 .. u_n \rangle \Rightarrow u_1, .., u_n, v$ sono indipend. Assurdo perché in X ci sarebbero $n+1$ vettori indipendenti!

b) Per assurdo $X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ma che $u_1 .. u_n$ siano dipendenti. Ne segue che gli elementi combinazione degli altri si possono sopprimere

senza cambiare lo Span $= X$. Ne segue che

$$X = \langle u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k} \rangle \quad \text{con } k < n$$

Soppressi tutti i termini combinazione degli altri, resta una BASE con $k < n$ vettori. ASSURDO per il teorema della dimensione.

TEOREMA DEL COMPLETAMENTO

Se $\dim X = n$ $(n \neq 0, n \neq \infty)$, e sia $u_1, \dots, u_k$ un insieme di vettori indipendenti, $k < n$.

Allora $\exists\, u_{k+1}, \dots, u_n \in X$: $u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n$ sono una BASE di X.

E' possibile che $\langle u_1, .., u_k \rangle = X$? NO perché $k < n$.

Ne segue che $\exists\, u_{k+1} \in X$ $\underline{u_{k+1} \notin \langle u_1, .., u_k \rangle}$.

Dal Lemma $\Rightarrow u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}$ sono indipendenti

se ora $k+1 = n$ allora dal th. dei generatori e

ho che $u_1 \dots u_{k+1}$ generano X e sono indip. $\Rightarrow$ sono

una base di X.

Altrimenti si continua ad aggiungere vettori

$u_{k+2}, u_{k+3}, \dots$ fino ad arrivare a u_n. Perché $u_1 \dots u_n$

sono $\boxed{n}$ e sono indipendenti per costruzione, per il th. dei

generatori, generano X, e sono dunque una base.

$u_1, \dots u_n$ indipendenti $\quad v \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

$\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$:

$$v = \sum_1^n \alpha_i u_i \qquad \alpha_1 \dots \alpha_n \text{ coordinate di } v \text{ rispetto ad } u_1 \dots u_n$$

$$v = \sum_1^n \beta_i u_i$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$0 = \sum_1^n (\alpha_i - \beta_i) u_i$$

$\Longrightarrow (\alpha_i - \beta_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$\Longrightarrow \alpha_i = \beta_i$

combinazione lineare nulla di vettori indipendenti.

$v = 0 \qquad \sum_1^n \alpha_i u_i = 0$