Note Title 11/12/2020

LEMMA FONDAMENTALE

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle A_2, \dots, A_n \rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$A_1 \in \langle A_2, \dots, A_n \rangle$$

Dim. $\Rightarrow$

Hp $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle A_2, \dots, A_n \rangle$

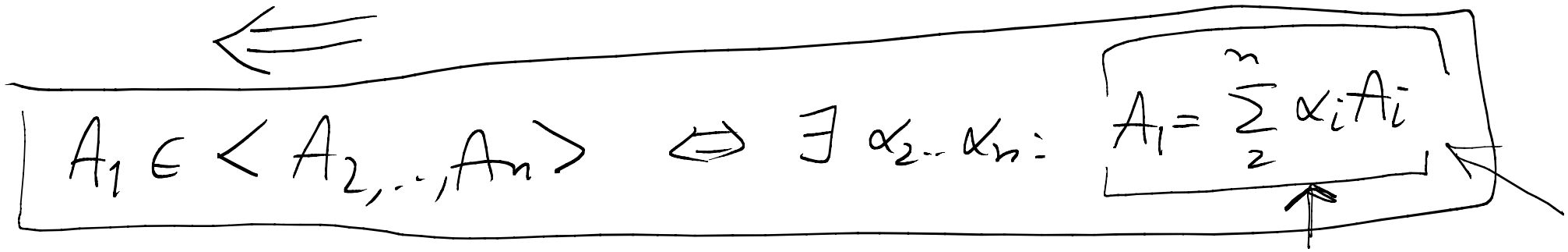
$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = X$

$\langle A_2, \dots, A_n \rangle = Y$

$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$

$\Rightarrow A_1 \in Y$ perché appartiene ad X

$x = A_1 = 1 \cdot A_1 + 0A_2 + \dots + 0A_n$



Hp. $A_1 \in \langle A_2,..,A_n \rangle \iff \exists\, \alpha_2..\alpha_n : A_1 = \sum_2^n \alpha_i A_i$

$Y \subseteq X$ perché se x è combinazione di $A_2..A_n$ lo è anche di $A_1, A_2, .., A_n$ (basta porre il coeff. di $A_1 = 0$)

Occorre provare che $X \subseteq Y$ fissato $x \in X$ cioè $\exists \beta_1,..\beta_n$ tali che $x = \beta_1 A_1 + \sum_2^n \beta_i A_n = \beta_1 \sum_2^n \alpha_i A_i + \sum_2^n \beta_i A_i =$

$$= \sum_2^n (\beta_1 \alpha_i + \beta_i) A_i \in \langle A_2,..,A_n \rangle$$

AL_3.1

DEFINIZIONE $A_1, A_2, \dots, A_n$ si dicono (LINEARMENTE) INDIPENDENTI se

$$\sum_1^n \alpha_i A_i = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Si dicono (linearmente) DIPENDENTI se $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ NON TUTTI NULLI tali che $\sum_1^n \alpha_i A_i = 0$

$\Updownarrow$

$A_1, \dots, A_n$ sono dipendenti se e solo se qualcuno di essi è combinazione dei rimanenti.

DIM Se $A_1 \dots A_n$ sono dipendenti $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$: $\sum \alpha_i A_i = 0$ e α_j sono non tutti nulli.

(sia $\alpha_j \neq 0$). Ricavando l'espressione $\sum_1^n \alpha_i A_i = 0$ rispetto a A_j si ottiene

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_j A_j + \cdots + \alpha_n A_n = 0$$

$$-\alpha_j A_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i$$

poiché $\alpha_j \neq 0$, dividendo per $-\alpha_j$ si ottiene

$\longrightarrow$ $A_j = \sum_{i \neq j} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} A_i \approx A_j$ è combinazione dei rimanenti

$\Longleftarrow$ $A_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i \iff \boxed{\sum_{i \neq j} \alpha_i A_i - A_j = 0}$

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + (-A_j) + \cdots + \alpha_n A_n = 0$

$\neq 0$

$\boxed{\alpha_j \neq 0}$

$\boxed{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{j-1}, -1, \alpha_{j+1} \ldots, \alpha_n}$

COROLLARIO $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti se NESSUNO è combinazione degli altri.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sistema indipendente

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \alpha_i=0 \ \forall i$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=0_{\in\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=0 \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

α_1	α_2	α_3	
1	1	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$e_1, e_2, \ldots$ un sistema ortogonale

$$e_i e_j = \begin{cases} \neq 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \Longleftarrow \quad \Longrightarrow \text{sono indipendenti}$$

$$\sum_1^n \alpha_i e_i = 0 \qquad \left(\overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \ldots n \right)$$

Moltiplicando ambo i membri per e_j (j fissato ad arbitrio) si ottiene

$$\underbrace{e_j \sum_1^n \alpha_i e_i}_{\| \ } = e_j 0 = 0$$

$$\sum_1^n \alpha_i \overbrace{e_j e_i}^{\uparrow} = \alpha_j \underbrace{|e_j|^2}_{\uparrow}$$

$\Rightarrow \alpha_j |e_j|^2 = 0$ perché $|e_j|^2 \neq 0$

se segue $\alpha_j = 0$ ripetendo per ogni j segue $\alpha_j = 0 \ \forall j$

$\{0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ è dipendente

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = 0$

$1 \cdot 0 + \sum_1^n \alpha_i A_i = 0$

$1 \cdot 0 = 0$; $\sum_1^n \alpha_i A_i = 0$

$\neq 0$

$\{A, A, A_1 \dots, A_n\}$ è dip. perché

$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$$1(A) + (-1)A + \sum_1^n \alpha_i A_i = 0$$

$1(A) + (-1)A = 0$; $\sum_1^n \alpha_i A_i = 0$

DEFINIZIONE Uno spazio vettoriale X si dirà di **DIMENSIONE FINITA** se esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Si dirà di DIMENSIONE INFINITA se per ogni scelta di vettori $x_1, \dots, x_n$ (e per ogni n) si ha

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset X$$

inclusione STRETTA

ES. $\mathbb{R}^n$ è di dimensione FINITA perché

$$\mathbb{R}^n = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

X = Polinomi di grado $\leq N$ è di dimensione finita

$$p(x) = \sum_0^N \alpha_i x^i \in \langle \underbrace{1, t, t^2, \dots, t^N}_{\text{generatori dei polinomi di grado} \leq N} \rangle$$

$X = \mathbb{R}[x]$ = Polinomi in x (di grado qualsiasi)
è di dimensione infinita. Infatti

$\forall\, p_1, p_2, \dots p_n$ polinomi, il grado massimo che può avere in ogni loro combinazione $\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \dots + \alpha_n p_n(x)$ non può superare il massimo dei loro gradi e quindi

qualunque combinazione non può essere uguale a t^M

con $M > \{\deg p_1, \deg p_2, \dots, \deg p_n\}$

> degree = grado

DEFINIZIONE Un numero finito di vettori $x_1, \dots, x_n \in X$ si dirà una BASE se

1) $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ($\Rightarrow$ X è di dimensione finita)

2) $x_1 \dots x_n$ sono indipendenti

Esempi $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ (e_1, e_2, e_3) è una base perché $\forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si ha $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e vale 1)

Prima è stato anche richiesto che e_1, e_2, e_3 sono indipendenti e quindi vale anche 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$ ha sempre soluzione (e quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$) 2) è stata verificata prima.

$\{1, t, t^2, \dots, t^N\}$ è una base per i polinomi di grado massimo N.

Si è visto che sono un sistema di generatori

Sono anche INDIPENDENTI: supponiamo che $\sum_0^N \alpha_i t^i = 0$

e proviamo che $\alpha_i = 0 \ \forall i = 0 \dots N$

↓ polinomio identicamente 0.

$$p(x) = \sum_0^N a_i x^i \qquad p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$t_1 \in \mathbb{R} \quad 0 = p(t_1) = \sum_0^N a_i t_1^i$

(Th. Ruffini) se $p(t_1) = 0$ $p(x)$ è divisibile per $(x - t_1)$

$p(x) = (x - t_1) p_1(x) \quad \deg p_1 = \deg p - 1$

$p(x) = \sum_0^N a_i x^i \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{x = 0} \rightarrow p(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$p(0) = 0$

$p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N = x \underline{(a_1 + a_2 x + \dots + a_N x^{n-1})}$

$\Rightarrow \sum_1^N a_i x^i \equiv 0$

TEOREMA DI ESISTENZA DELLE BASI

"In ogni spazio di dimensione finita esistono basi."

DIM. Poiché $\dim X < \infty$ esistono $x_1 \dots x_n \in X$ tali che $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Se $x_1 \in \langle x_2, \dots, x_n \rangle$ per il lemma fondamentale si ha che $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle x_2, \dots, x_n \rangle$.

Se invece $x_1 \notin \langle x_2, \dots, x_n \rangle$ non può essere scartato e si passa a considerare x_2. Continuando sino ad x_N, resta una base.