Note Title 11/6/2020

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$k_1=1$	(1)	1	3	1	3	0
$k_2=2$	0	(2)	0	1	1	0
$k_3=4$	0	0	0	(2)	0	0

$k_1 < k_2 < k_3$

$\sim$

x_1	x_3	x_2	x_5	x_4
(1)	3	1	3	1
0	0	(2)	1	1
0	0	0	0	(2)

"Sugli scalini coeff. $\neq 0$"

"Sotto gli scalini coeff. $= 0$"

"Sopra gli scalini ?"

Cioè

$$\sum_1^n x_i A_i = 0$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{i \text{ pivot}} x_i A_i = -\sum_{j \text{ non-pivot}} x_j A_j$$

$$\begin{cases} x_{\bar{j}} = -1 \\ x_j = 0 \quad \forall j \neq \bar{j} \end{cases}$$

$$\sum_{\text{pivot}} x_i A_i = A_{\bar{j}}$$

$A_{\bar{j}} \in \langle A_i : i \text{ pivot} \rangle$

Ogni colonna non-pivot è combinaz. lineare delle colonne pivot

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\exists\, \alpha : \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\alpha = 3}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

x_5

x_1	x_2	x_5
1	1	-3
0	2	-1
0	0	0

Ogni colonna non-pivot è combinazione delle pivot.

Se il sistema è a scala "ridotto" ogni colonna non-pivot è combinazione delle pivot che la precedono

x_1	x_3	x_2	x_5	x_4	x_6
(1)	3	1	3	1	1
0	0	(2)	1	1	1
0	0	0	0	(2)	-2

x_1	x_2	x_5
1	1	-3
0	2	-1
0	0	0

bivet

x_1	x_2	x_4	x_5
1	1	1	-3
0	2	1	-1
0	0	2	0

$2x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = 0}$

B – комбинация A_i, $i = 1 \dots n$ если

$$\exists x_i : \boxed{B = \sum_1^n x_i A_i}$$

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle = \left\{ \sum_1^n x_i A_i,\ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	−1	2	0	−2	1	
	1	3	5	2	1	II + I
	2	2	6	4	1	III + 2I
II	0	5	5	0	2	
III	0	6	6	0	3	III / 3
III	0	2	2	0	1	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	−1	2	0	−2	1	
	0	5	5	0	2	
→	0	2	2	0	1	III − $\frac{2}{5}$ II
III	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	

	x_1	x_4	x_2	x_3	x_5
	−1	−2	2	0	1
	0	0	5	5	2
III	0	0	0	0	1/5

SOTTOSPAZIO

X spazio vettoriale

Y si dirà SOTTOSPAZIO DI X se

1) $Y \subseteq X$

2) a) $y_1, y_2 \in Y \Rightarrow y_1 + y_2 \in Y$

   b) $\lambda \in \mathbb{R}$ $y \in Y \Rightarrow \lambda y \in Y$

Y è chiuso per la somma e il multiplo scalare

Se Y è un sottospazio di X è uno spazio vettoriale (con le stesse operazioni)

X funzioni definite su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$

Y funzioni continue su $[a,b]$ " " " $\mathbb{R}$

1) $Y \subseteq X$

2) a) $y_1, y_2 \in Y$, cioè sono f. continue, lo loro somma lo è altrettanto. Lo dice un teorema sulle f. continue.

b) y è una funzione continua, allora λy lo è $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Idem per le funzioni derivabili su $[a,b]$, polinomi.

LE FUNZIONI POSITIVE NON SONO UN SOTTOSPAZIO

($\lambda < 0 \Rightarrow \lambda y \notin Y$ se $y \in Y$)

Lemma $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ è un sottospazio

$A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^N$ $\qquad \langle A_1, \dots, A_n \rangle = \{ \underbrace{\sum \alpha_i A_i}_{\in \mathbb{R}^N \ \forall \alpha_i} \ ; \alpha_i \in \mathbb{R} \}$

1) $\langle A_1, \dots, A_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^N$

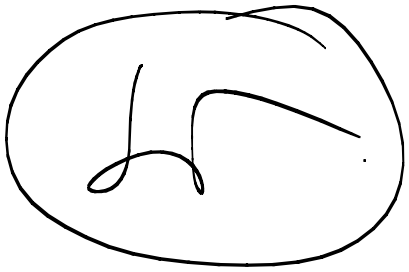
2) $B_1, B_2 \in \langle A_1 \dots A_n \rangle \overset{?}{\Longrightarrow} B_1 + B_2 \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

$B_1 = \sum_1^n \alpha_i A_i$, opportuni $\alpha_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots n$

$B_2 = \sum_1^n \beta_i A_i$ opportuni $\beta_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots n$

$$B_1 + B_2 = \sum_1^n \overbrace{(\alpha_i + \beta_i)}^{\in \mathbb{R}} A_i \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

comb. lineare



$\alpha \in \mathbb{R}$ $A \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha A \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

$A = \sum_1^n \alpha_i A_i \Longrightarrow \alpha A = \alpha \sum_1^n \alpha_i A_i = \sum_1^n (\alpha \alpha_i) A_i \in$ comb. lineare

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

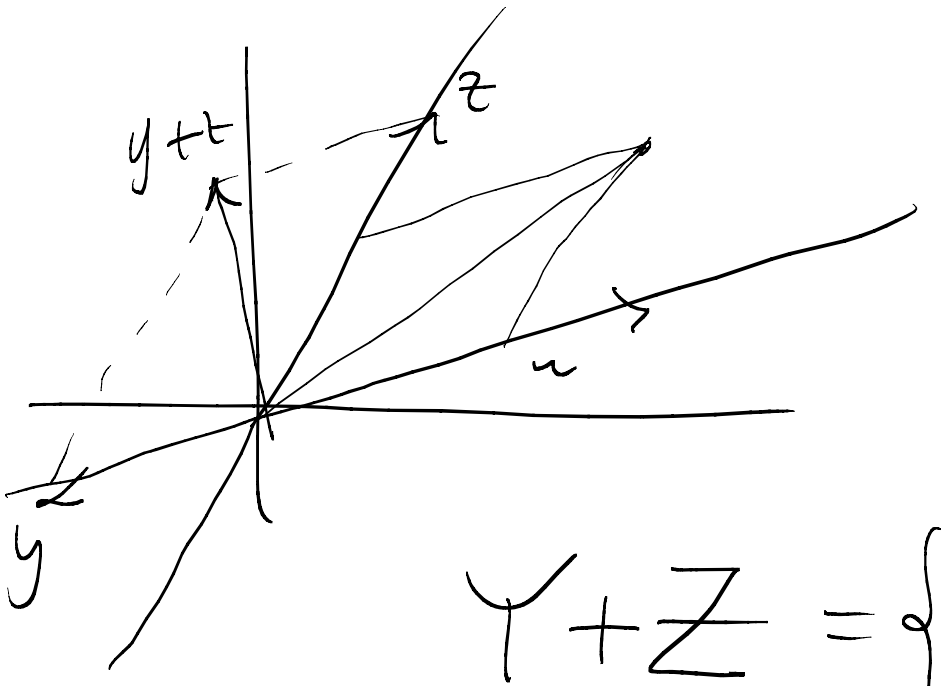
5 vettori in $\mathbb{R}^3$

Dato X spazio vettoriale e dati Y, Z sottospazi, si definisce (spazio) SOMMA di Y e Z, $Y+Z$ come l'insieme

$$Y+Z = \{ y+z : y \in Y, z \in Z \}$$

Dato X e Y_i, $i=1..n$, sottospazi si definisce

$$\sum_1^n Y_i = \left\{ \sum_1^n y_i : y_i \in Y_i \ \forall i=1..n \right\}$$



$$X = \mathbb{R}^2$$

$$Y = \langle u \rangle$$

$$Z = \langle v \rangle$$

$$Y + Z = \{ y + z : y \in Y \; z \in Z \}$$

$$y = \alpha u \in \langle u \rangle$$

$$z = \beta v \in \langle v \rangle$$

α, β scalari qualsiasi

$$y + z = \alpha u + \beta v$$

$$= \{ \alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle u, v \rangle = \mathbb{R}^2$$

u e v non sono multipli

$$X = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$Y = \langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$X+Y = \{ x+y : x \in X \quad y \in Y \}$$

$$x = \sum_1^n \alpha_i u_i \qquad y = \sum_1^m \beta_j v_j$$

$$x+y = \sum_1^n \alpha_i u_i + \sum_1^m \beta_j v_j = \langle u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m \rangle$$

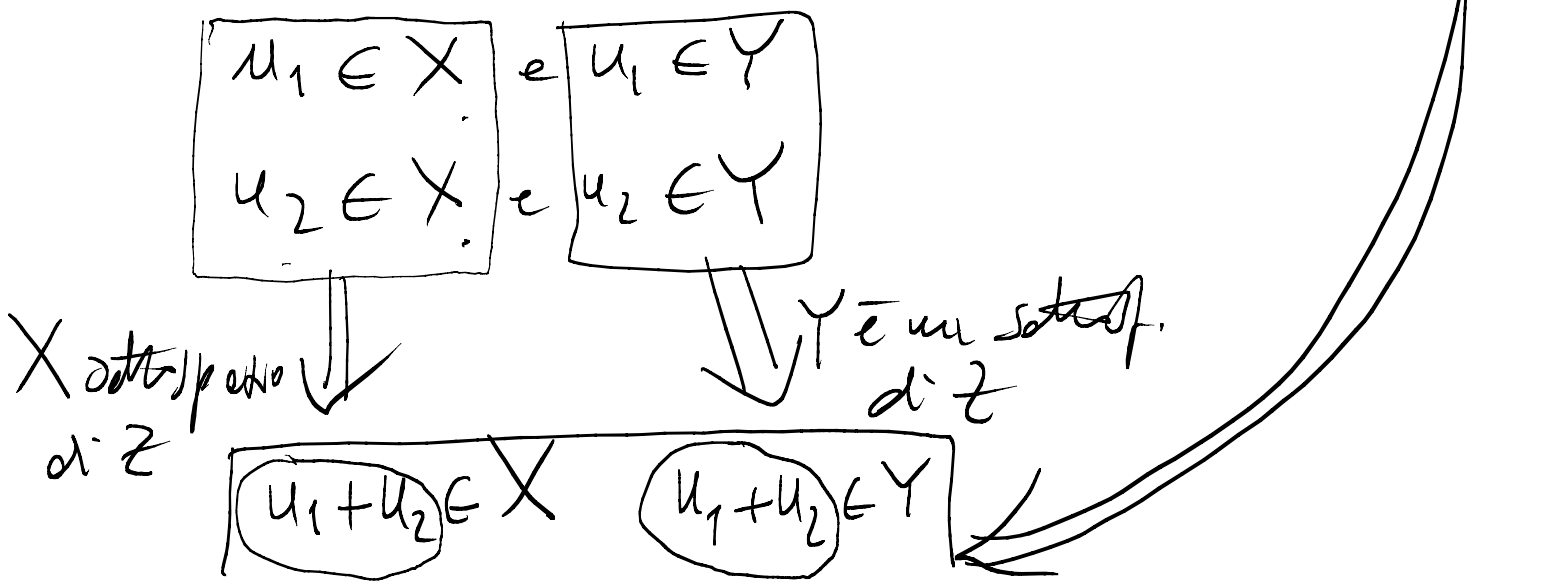
tutte le comb. lineari di $u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$

X, Y sottospazi di Z

$$X \cap Y = \{ w \in Z : w \in X, w \in Y \}$$

1) Dimostra $X \cap Y \subseteq Z$ ($X \cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$)

2) $u_1, u_2 \in X \cap Y \Rightarrow u_1 + u_2 \in X \cap Y$



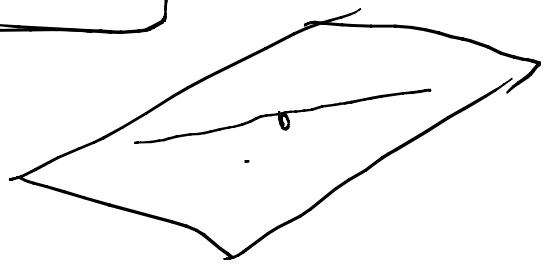
$X \subseteq Y$ + $X \supseteq Y$ $\Rightarrow X = Y$

AL_1_2

$X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

$Y = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$



$X \subseteq Y$?

$$\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n & & & \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & u_1 & u_2 & \dots u_n \end{array}$$

se tutti i sistemi lineari sono risolubili, allora ogni dei termini noti $u_1 u_2 \dots u_n$ è esprimibile come combinazione delle colonne dei coefficienti $v_1 \dots v_m \Rightarrow u_1, u_2, \dots u_n \in \langle v_1 \dots v_m \rangle$