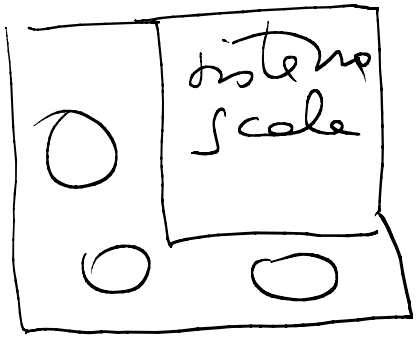
Note Title 10/30/2020

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_h & x_{h+1} & \cdots & & x_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\Bigg|
$$



per ogni riga i in cui appare un coefficiente $\neq 0$ si definisce il PIVOT a_{ik_i} come il primo elemento non nullo sulla riga i.

$$k_{h+1} < k_{h+2} < \cdots < k_n$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 1 & -1 & 3 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b_2 \end{array}$$

REGOLE PER TRASFORMARE UN SISTEMA IN UNO SCALA

$k_1 = 2$

$k_2 = 1 < k_1$

NON E' SCALA

---

(1) Si possono scambiare le righe (cioè le equazioni) a piacere.

OTTIMO perché, scambiando l'ordine delle equazioni il sistema precedente diventa

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & b_1 \end{array}$$

x_1, x_2 PIVOT

x_3, x_4 param.

CHE E' SCALA

$k_1 = 1 \quad k_2 = 2 > 1$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & b_3 \end{array}$$

$k_1 = 2 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 1$

$I \leftrightarrow III$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \end{array}$$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 2 < k_2$

NON E' SCALA. Però

Scambiando $II \leftrightarrow III$ si ottiene

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= b_3 \\ x_2 &= b_1 \\ x_3 &= b_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= b_1 \quad x_1 = b_3 \\ x_3 &= b_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 0 & -1 & b_1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & b_2 \end{array}$$

↑ colonna di zeri.

$\rightarrow \boxed{x_3}$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & \\ 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 3 & 1 & 4 & b_2 \end{array}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (b_1, b_3, b_2)$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_3 &= b_2 \\ x_2 &= b_3 \end{aligned}}$$

SCAMBIANDO LE COLONNE

DI x_2 e x_3

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & \\ 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}$$

③ Se si moltiplica un'equazione (di un sistema) per un numero NON NULLO, le soluzioni (eventuali) restano identiche

$$2x + y = 1$$

PIVOT

(x, y) una soluzione di

moltipl. per 2 $\rightarrow$ $4x + 2y = 2$

$\rightarrow$ $2(2x + y) = 2 \cdot 1$

$\boxed{2 = 1 \quad \text{FALSA}}$

$\boxed{0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 \quad \text{VERA}}$

$0 \cdot x = 0$ ogni x è soluzione

$0 \cdot 1$

$\Downarrow ?$

$x = 1$ è falsa per tutte le soluzioni $x \neq 1$

④ Sostituendo ad un'equazione la sua somma con un'altra il sistema è equivalente a quello iniziale

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{moltipl. } \times 2 \neq 0} \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 4x + 2y - 2(2x+y) = \\ = 3 - 2 \cdot 1 = \\ = -1 \end{cases}$$

II − I

è equival. a (stesse soluzioni se esistono) entrambi indeterminati, altrimenti

II − 2I

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}$$ NON HA SOLUZ.

II − 2I

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{array} \xrightarrow{\text{II} - 2\text{I}} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

è equiv. al primo e non ha soluzioni

NON È RISOLUBILE!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

muove II

muove III

$k_1 = 1 \quad k_2 = 2$

$$\xrightarrow{\text{III} - \frac{1}{5}\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{18}{5} \end{array}\right]$$

$1 - \frac{1}{5}(-1)$

1 e 1 sono soluzioni perché è triangolare.

ALGORITMO DI GAUSS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} + \text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\text{II}/2$ si modifica solo la II

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 2$

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \hline 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} \left|\begin{array}{cc} -1 & z \\ -1 & 0 \\ & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ \boxed{y = -1 + z} \end{cases} \Longrightarrow \quad x + 2(-1+z) = -1$$

$$\boxed{x = 1 - 2z}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2z \\ -1+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

GAUSS – JORDAN → (GIORDÀN)

?!

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & & z \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \xrightarrow{I-2I} \begin{array}{cc|cc} x & y & & z \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1-2z \\ -1+z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1-2z \\ y = -1+z \end{cases}}$$

$$z = z$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} II - 2I \\ \hline III - I \\ IV - 3I \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

1 e 1 sono soluzioni

$y = -1$

$y = -1$

$y = -1$

$\neq$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{IV - II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

NON HA SOLUZ

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{I + II} \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$\boxed{AL\_1.1}$

$\boxed{AL\_1.3}$