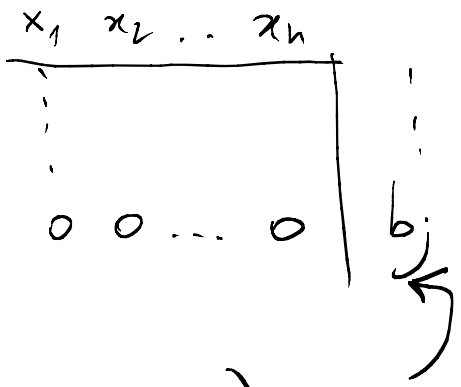
Note Title 10/28/2020

Righe di 0 nei coeff.



1) se $b_j \neq 0 \Rightarrow$ eq. e, di conseguenza il sistema sono incompatibili

2) se $b_j = 0$ l'equazione è inutile e può essere soppressa.

$ax = b$

1 sol. (e una sola) se $a \neq 0$

Nessuna soluzione se $a = 0$ e $b \neq 0$

Infinite soluzioni se $a = 0$ $b = 0$

$x + y = 1$ ←

1 eq. 2 incognite

AL_1.1

Colonne di 0

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	0	1	b_1
-1	2	0	2	b_2

$(\star)$

x_3

x_1	x_2	x_4	
1	2	1	b_1
-1	2	2	b_2

$(\star\star)$

arbitrario

$\lambda \in \mathbb{R}$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda, \bar{x}_4)$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4)$ soluzione di $(\star\star)$

La quarta soluzione del sistema $(\star)$ si ottiene aggiungendo a quella di $(\star\star)$ (se esiste) un valore arbitrario per tutte le incognite soppresse.

$\mathbb{R}^3$ $\underline{x=0}$ 1 eq. 3 incognite x,y,z

x	y	z	
1	0	0	0

le colonne di y e z sono costituite da 0

$\mathbb{R}^1$ $x=0$ ha la soluzione $z=0 \in \mathbb{R}$

Tutte le soluzioni dell'eq. $\in \mathbb{R}^3$ $(0,y,z)$ $\forall y,z \in \mathbb{R}$

Sistemi triangolari

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

x	y	z	
1	1	−1	1
0	1	1	2
0	0	1	−3

(a soluzione)

Dalla III eq. (risolta), sostituendo nelle prime due si trova

$z=-3$

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow x=-7$$

1	1	−2
0	1	5

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+3z=-1 \end{cases}$$

$m=2 \quad n=3$ rettangolare

x	y	z	
1	1	1	1
0	2	3	-1

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ 2y=-1-3z \end{cases}$$

z arbitrario in $\mathbb{R}$

(PARAMETRO)

x	y		z
1	1	1	-1
0	2	-1	-3

↗ triangolare

1 e 1 sulla diagonale PER OGNI SCELTA DI $z \in \mathbb{R}$

$m = 2 \quad n = 4$

$$\begin{cases} x + y - z - w = 1 \\ y + z + 3w = 4 \end{cases}$$

$(*)$

x	y	z	w	
(1)	1	-1	-1	1
0	(1)	1	3	4

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + z + w \\ y = 4 - z - 3w \end{cases}$$

sottraendo alla I eq. la II ottenuta

$$x = -3 + 2z + 4w$$

Tutte le soluzioni del sistema $(*)$ avranno la forma

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2z + 4w \\ 4 - z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad z, w \text{ arbitrari in } \mathbb{R}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0 + zu + wv$$

u, v

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^4$

Sistema di coefficienti (a_{ij}) $i = 1 \dots m$ (n° delle eq.)
$j = 1 \dots n$ (n° delle incognite)

Supponendo di aver già soppresso tutte le righe di zeri. (⇒ ogni riga contiene d'coeff elementi non nulli)

Sia k_i il primo indice di colonna tale che

$$a_{ik_i} \neq 0$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$

0 0 ① 0 1 1 2 — I eq.

0 ① 3 -2 1 3 2 — II eq.

PIVOT

$k_1 = 3$

$k_2 = 2$

L'elemento a_{ik_i} è detto PIVOT

x_{k_i} incognita PIVOT, così come la colonna k_i

Il sistema si dirà SCALA se esiste

$k_1 < k_2 < \dots < k_m$

STRETTE

eq.1) 0 0 .. 0 ±0 ? ? ? ?

eq.2) 0 0 0 0 ±0 ? ? ?

eq.3) 0 0 .. 0 0 0 0 0 ±0

AL 1.1

1	2	-1	$k_1 = 1$
0	1	1	$k_2 = 2$
0	0	2	$k_3 = 3$

-	1	-1	0	0	0	1
-	0	0	0	0	3	0
-	0	0	0	0	0	7

1	1	-3
0	3	0
0	0	7
0	0	0

$n > m$ (più incognite che equazioni)

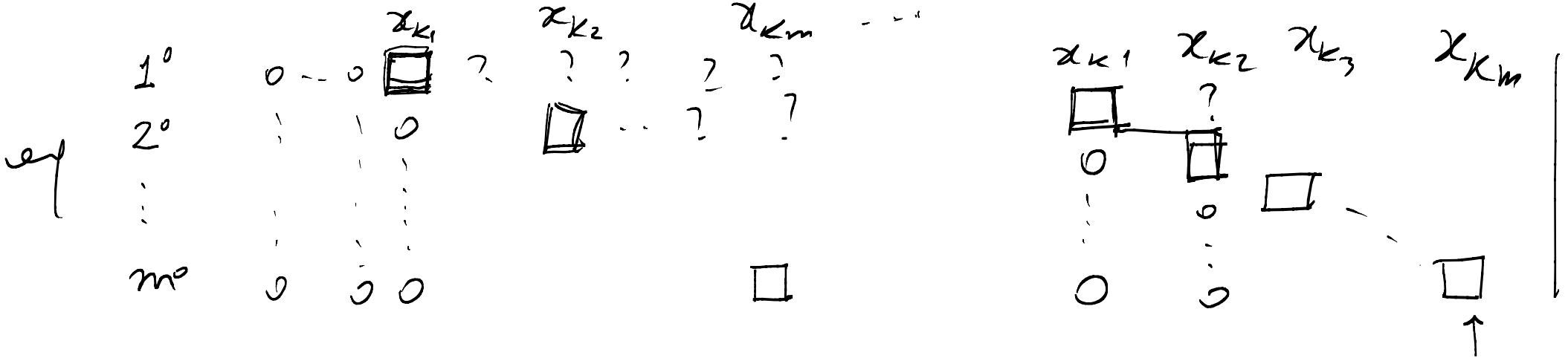
Risoluzione di sistemi a scala

1) Portare a II membro Tutte le colonne NON-PIVOT (parametriche)

2) Risolvere, per ogni scelta di valori dei parametri (incognite NON-PIVOT) il sistema triangolare rimasto

$k_1 < k_2 < \dots < k_m$

"□" = $\neq 0$



$(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}) = \left(\begin{array}{c}\text{espressi di} \\ \text{parametri}\end{array}\right)$

Le soluzioni del sistema omogeneo contengono le variabili NON-PIVOT (parametri) mentre per le PIVOT si UTILIZZANO LE ESPRESSIONI TROVATE risolvendo il sistema triangolare

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 & (1, 2, -1) \\ -x + y + z = 2 & (-1, 1, 1) \end{cases}$$

L'intersezione è $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ soluzioni del sistema$\}$

x	y	z	
1	2	-1	3
-1	1	1	2

$k_1 = 1$

$k_2 = 1$

NON E' SCALA!

$\Downarrow$

(1)	2	-1	3
0	(3)	0	5

inalterata

Sommando alla II la I

x_{k_1}	x_{k_2}	z	
1	2	3	1
0	3	5	0

$k_1 = 1$ $k_2 = 2 > k_1 \Rightarrow$ sistema è scala spostando le colonne non pivot a II membro e ottengo

Dall'ultima equazione (nella sola incognita PIVOT) $y = x_{K2}$ si ottiene

$$3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Sost. nella I equazione si ottiene

$$x + \underbrace{2 \cdot \frac{5}{3}}_{2y} = 3 + z$$

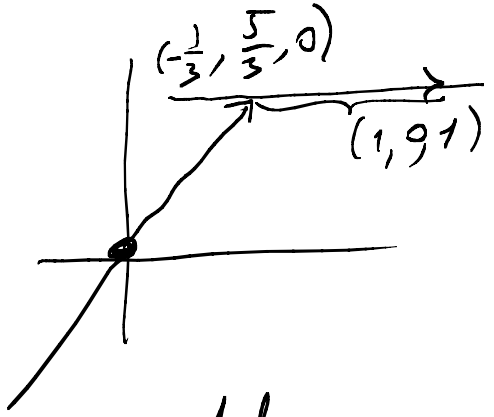
da cui

$$x = -\frac{1}{3} + z$$

Le soluzioni avranno la forma $\left(-\frac{1}{3} + t, \frac{5}{3}, z\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(x, y, z)

$$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) + z\,(1, 0, 1)$$



retta parametrica

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + z \\ \frac{5}{3} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases} a = b \Rightarrow \lambda a = \lambda b \\ c = d \end{cases} \quad \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a + c = b + d \end{cases} \leftarrow$$