Note Title 10/23/2020

A insieme qualunque

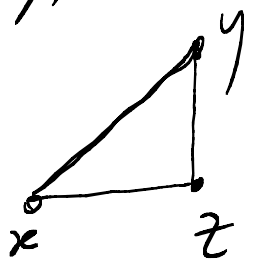
$d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in A$

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in A$

3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in A$

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in A$



ASSIOMI DI METRICA (o DISTANZA).

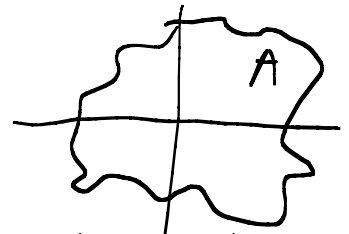
L'insieme A con la funzione d si dirà

SPAZIO METRICO

$x_0 \in A$

$\delta \geq 0$

$$B(x_0, \delta) = \{x \in A : d(x, x_0) \leq \delta\}$$



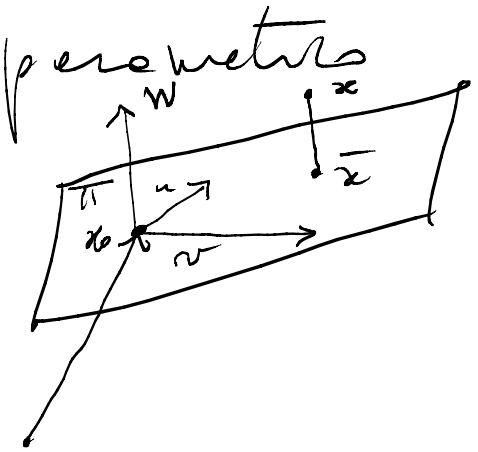
A è metrico

$$A = \mathbb{R}^n \qquad d(x,y) = |x-y|$$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico colla distanza euclidea

$x_0 + \alpha u + \beta v$ forma parametrica

x $\langle u, v \rangle$



$(x - x_0)_v$

$w \perp \langle u, v \rangle$

Per esempio in $\mathbb{R}^2$

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$? $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad v \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dati

DATI

$u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0$

$v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$

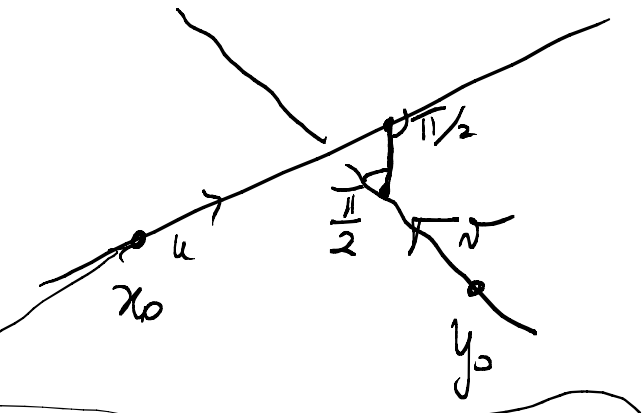
} SISTEMA LINEARE

INCOGNITE

$v \ (a, b, c)$ $\quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$t \in \mathbb{R}$

$s \in \mathbb{R}$



distanza (minima) fra due rette

$\bar{t}, \bar{s}$: $|x_0 + \bar{t}u| - (y_0 + \bar{s}v)|$ tra ortogonale a u ed a v

$$\rightarrow \left| \underline{x_0 + tu} - (y_0 + sv) \right|^2 =$$

$$= \left| \cancel{x_0} + \underline{\underline{t}u} - \cancel{x_0} - \underline{\underline{\bar{t}}u} + \underline{x_0 + \bar{t}u} - y_0 - \bar{s}v + \cancel{y_0} + \underline{\bar{s}v} - \cancel{y_0} - \underline{sv} \right|^2 =$$

$$= \left| \underbrace{x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v}_{\perp u, v \Rightarrow \perp \langle u,v \rangle} + \underbrace{\overbrace{(t-\bar{t})u + (\bar{s}-s)v}^{z}}_{\in \langle u,v \rangle} \right|^2 = \left| x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v \right|^2 + \left| z \right|^2 \geq$$

Pitagora

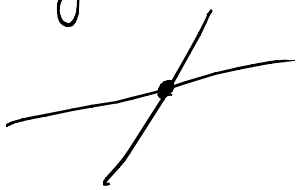
≥ 0

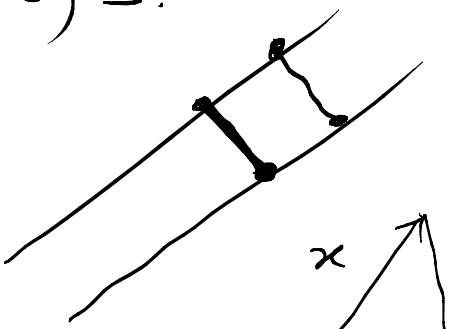
$$\geq \left| x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v \right|^2$$

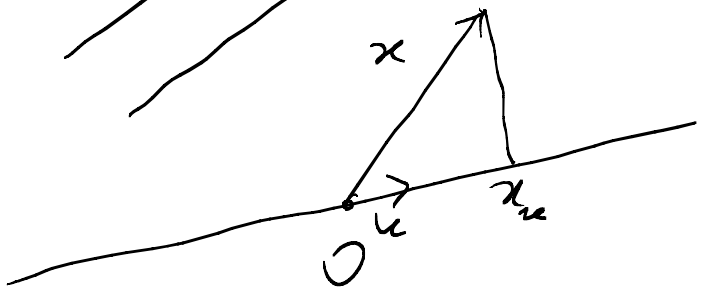
t, s incognite

$$\begin{cases} [x_0 + tu - y_0 - sv]u = 0 \\ [\quad\quad\quad\quad\quad\quad]v = 0 \end{cases}$$

due equazioni nelle due incognite t, s.



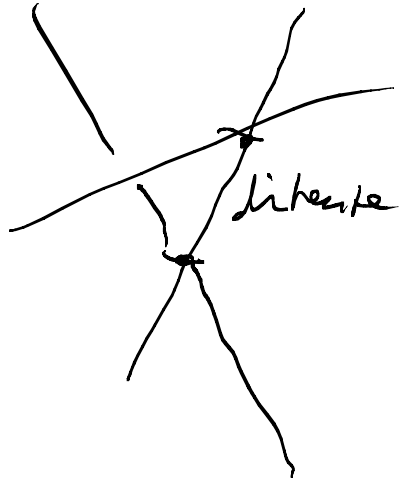




$x_0 + tu$ e $y_0 + sv$

?

Le posizioni delle due rette di partenza distanti sono $\boxed{x_0 + \bar{t}u}$ e $\boxed{y_0 + \bar{s}v}$



$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m \qquad B \in \mathbb{R}^m$

$B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$?

$\Updownarrow$

$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n : \boxed{B = \sum_1^n \alpha_i A_i} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad \dots\dots \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots\dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

VETTORE DEI TERMINI NOTI
$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$

i : indice di riga = equazione

INCOGNITE

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} coefficienti del sistema.

$\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$: SONO TUTTE SODDISFATTE

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 1 \\ 3x - y - z = 3 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$

NOTAZIONE SCALARE DEI SISTEMI

$$x\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

NOTAZIONE VETTORIALE DEI SISTEMI

A_1 A_2 A_3 A_4

COLONNE (generatori dello SPAN)

incognite x, y, z, w

candidato elemento dello SPAN

INCOGNITE

$x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n$

(*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI

↑ VETTORE DEI TERMINI NOTI

UN SISTEMA SI DICE OMOGENEO se i termini noti sono tutti nulli ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$)

Questo significa SEMPRE ALMENO LA SOLUZIONE $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA è una n-upla $x_1 \dots x_n$ che verifica TUTTE LE EQUAZIONI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$2x = 3 \Longrightarrow x = \boxed{\frac{3}{2}}$ RISOLUZIONE = TRASF. IN UNA FORMA SPECCIALE

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	3
0	1	0	−1
0	0	1	4

MATRICE IDENTICA

Sistema identico

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

SISTEMI DIAGONALI

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \neq 0 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2	0	0	−3
0	3	0	2
0	0	5	1

$$\begin{cases} 2x_1 = -3 \\ 3x_2 = 2 \\ 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{2}{3} \\ x_3 = 1/5 \end{array}$$

$a_{11} = 2 \neq 0 \quad a_{22} = 3 \neq 0 \quad a_{33} = 5 \neq 0$

n° righe = n° colonne

Un sistema si dice **Quadrato** se il numero delle equazioni coincide con quello delle incognite.

AL_1.1

SISTEMI TRIANGOLARI (SUP)

$\neq 0 \quad \neq 0 \quad \neq 0$

$0x_1 + 0x_2 = 7$

x_1, x_2: è vera! **NO!**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 3 & -1 & \\ 0 & 0 & 5 & \end{array}\right)$$

	x_1	x_2	x_3	
2	2	0	0	-3
3	0	3	0	2
5	0	0	5	1

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

(x_1, x_2, x_3)