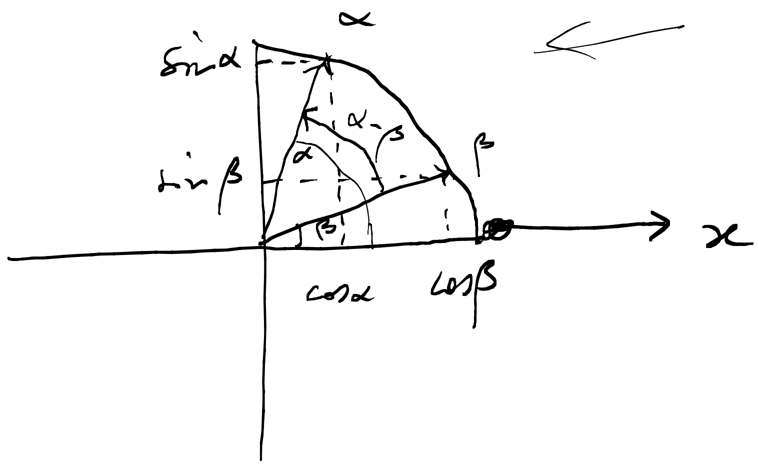
$$\cos(\alpha-\beta) = \overset{\text{ascisse}}{\cos\alpha\cos\beta} + \overset{\text{ordinate}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

uv



Prodotto scalare di due versori è il coseno dell'angolo da essi formato

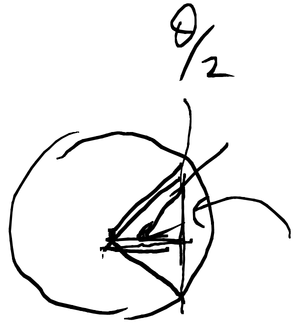
$u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$v = (\cos\beta, \sin\beta)$

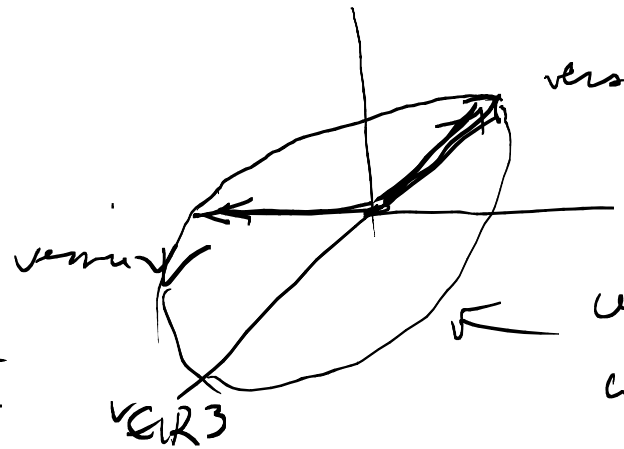
AL_2.1

In $\mathbb{R}^3$

versore $u \in \mathbb{R}^3$

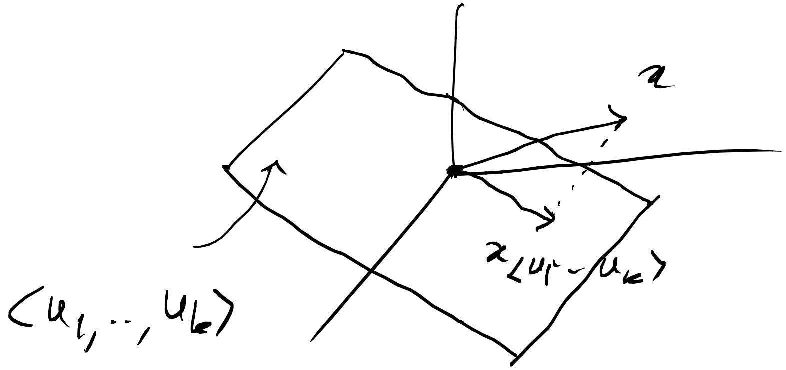


$$\frac{|u-v|}{2} = 1 \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$



cerchio di raggio 1 contenente 0, u, v

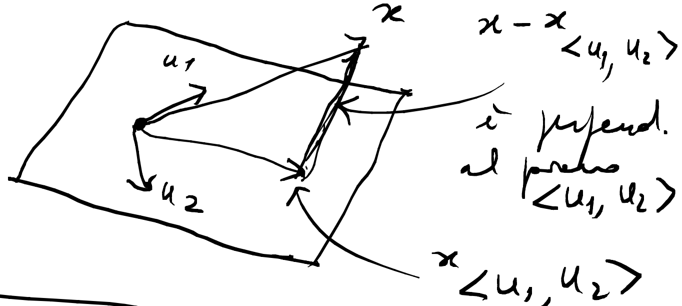
$x_{\langle u_1,\dots,u_k\rangle}$ è



l'elemento di $\langle u_1,\dots,u_k\rangle$,

e cioè la combinazione lineare

$\sum_{1}^{k} \alpha_i u_i$ (se esiste) tali che



$$x - x_{\langle u_1,\dots,u_k\rangle} \perp \langle u_1,\dots,u_k\rangle$$

cioè

$$\perp w, \ \forall w \in \langle u_1,\dots,u_k\rangle$$

Proprietà di ortogonalità di $x - x_{\langle u_1 \dots u_k\rangle}$

(th. proiezione)

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$ (Dis. triangolare)

$|x+y| \ge 0$, $|x| \ge 0$, $|y| \ge 0$

$$\Updownarrow$$

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$\|$$

$$(x+y)(x+y)$$

$$\|$$

$$|x|^2 + |y|^2 + 2\underset{\uparrow}{xy}$$

prodotto scalare

$$\cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2}xy \le \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2}|x||y|$$

$$\Updownarrow$$

$$xy \le |x||y|$$

è vero, perché

$$xy \le |xy| \le |x||y|$$

valore assoluto

Schwarz

AL_2.1

$\forall v \neq 0$ $\quad |x_v| \le |x|$ (Dis geom. Schwarz)
$\forall x$

$$\Updownarrow$$

$$\to \quad |x_v|^2 \le |x|^2 \quad \leftarrow$$

$$|x|^2 = |\underbrace{x - x_v}_{\substack{\text{ortogonale} \\ \text{a } v \\ \text{th. proiez}}} + \underbrace{x_v}_{\substack{\downarrow \\ \text{multiplo} \\ \text{di} \\ v}}|^2 \underset{\text{Pitagora}}{=} \overbrace{|x - x_v|^2}^{\ge 0} + |x_v|^2 \ge |x_v|^2$$

$$|x_v| = \Big|\underbrace{\frac{xv}{|v|^2}}_{\lambda} \underbrace{v}_{v}\Big| = \underbrace{\Big|\frac{xv}{|v|^2}\Big|}_{|\lambda|}\underbrace{|v|}_{|v|} = \frac{|xv|}{|v|^2}|v| = \frac{|xv|}{|v|} \quad \text{Quindi}$$

Schwarz

$$\boxed{\frac{|xv|}{|v|} \le |u|}$$

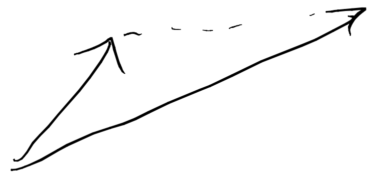
$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

AL_2.1 $\mathbb{R}^n$

AL_2.5 prodotto vettore

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ u & v \end{array} = \left(\underline{u_2 v_3 - u_3 v_2}, \; -\left(\underline{u_1 v_3 - u_3 v_1} \right), \; \underline{u_1 v_2 - u_2 v_1} \right)$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_2 v_3 - u_3 v_2$$



---

trinomio in λ

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \le |x + \lambda y|^2 = |x|^2 + 2xy\lambda + |y|^2 \lambda^2$ accade se e solo se

$0 \ge \frac{\Delta}{4} = (xy)^2 - |x|^2 |y|^2 \qquad (xy)^2 \le |x|^2 |y|^2 \iff |xy| \le |x||y|$

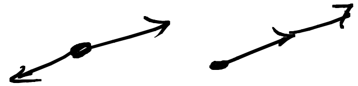
$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \left(\overset{\text{valore assoluto}}{|xy|} = \overset{\text{norme}}{|x||y|} \right) \Rightarrow$ il trinomio si annulla per un unico valore λ.

Il trinomio $|x+\bar{\lambda}y|^2$ si annulla se e solo se

$$|x+\bar{\lambda}y| = \underset{\text{scalare}}{0} \iff x+\bar{\lambda}y = \underset{\text{vettore}}{0} \iff \underline{\underline{x = -\bar{\lambda}y}}$$

e quindi x è un multiplo di y.

$x = \lambda y$



$$xy = (\lambda y)y = \lambda|y|^2$$

$$|x| = |\lambda||y|$$

$$\underline{|xy| = |\lambda||y|^2} \qquad \underline{|x||y| = |\lambda||y|^2}$$

$$|x+y| \le |x|+|y| \iff \boxed{xy \le |x||y|}$$

$$|x+y| = |x|+|y| \iff xy = |x||y|$$

deve essere $xy \ge 0$

$\Longleftarrow xy < 0$

"Uguaglianza" di Schwarz

$xy = |xy| \Longrightarrow$ in questo caso $\boxed{|xy| = |x||y|}$ e solo se x e y sono multipli cioè, vale l'uguaglianza nella dis. triangolare

se e solo se i vettori sono allineati (uno multiplo dell'altro)

e con versi concordi ($xy > 0$) $\quad xy = |x||y|\cos\hat{xy} > 0$ occorre e basta che sia $\cos\hat{xy} > 0$

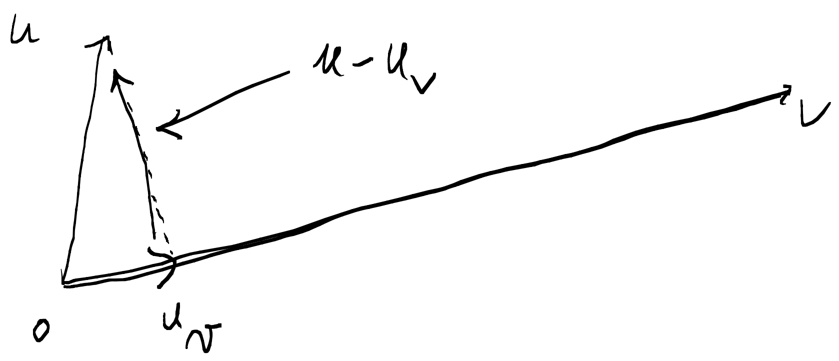
$0 \le |x+\lambda y|^2$

VERO!

$$|x+\lambda y|^2 = |x|^2 + (2xy)\lambda + |y|^2\lambda^2$$ trinomio di II grado in λ

$$= (x+\lambda y)(x+\lambda y)$$

il trinomio $|x+\lambda y|^2$ è ≥ 0 se $\boxed{\frac{\Delta}{4} \le 0} \iff (xy)^2 - |x|^2|y|^2 \le 0$



$$\underbrace{|u_v|}_{\left|\frac{uv}{|v|^2}v\right| \overset{\text{omog.}}{=} \frac{|uv|}{|v|^2}|v| =} = \frac{(uv)}{|v|}$$

Area parallelogramma = base × altezza = $|v|\,|u-u_v| =$

$$= |v|\sqrt{|u|^2 - |u_v|^2} = |v|\sqrt{|u|^2 - \frac{|uv|^2}{|v|^2}} = \sqrt{|v|^2\left[|u|^2 - \frac{|uv|^2}{|v|^2}\right]}$$

$$= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (xy)^2}$$

$\phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ $\quad \phi \in C^1(\Delta)$, iniettiva su $\mathring{\Delta}$,

$\phi_u \times \phi_v \neq 0$ su Δ

$\Rightarrow \phi_u , \phi_v$ sono indipendenti in ogni punto di Δ

Piano parametrico tangente a ϕ in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \phi(u_0,v_0)$

è (PARAMETRICA) $\underline{\phi_u}$ e $\underline{\phi_v}$ sono vettori tangenti nel p.

$$\boxed{\psi(\alpha,\beta) = \phi(u_0,v_0) + \alpha\,\phi_u(u_0,v_0) + \beta\,\phi_v(u_0,v_0)}$$

(IMPLICITA) $\boxed{(a,b,c) = \phi_u(u_0,v_0) \times \phi_v(u_0,v_0)}$

vettore normale

Piano tang.

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\alpha(u,v) = 2u_1v_1 - 3u_2v_2 + 4u_3v_3 \qquad \boxed{\alpha : \underset{u\in}{\mathbb{R}^3} \times \underset{v\in}{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}}$$

$u, v \in \mathbb{R}^3$

fissati $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = \overline{u}$ $\leadsto$ può definire una funzione della sola v ponendo

variabili

$$f(v) = \alpha(\overline{u}, v) = \underbrace{2\overline{u}_1}_{a_1} v_1 - \underbrace{3\overline{u}_2}_{a_2} v_2 + \underbrace{4\overline{u}_3}_{a_3} v_3 = \sum a_i v_i$$

$$\begin{cases} f(v+w) = \sum a_i(v_i + w_i) = \sum a_i v_i + \sum a_i w_i = f(v) + f(w) \\ f(\lambda v) = \sum a_i(\lambda v_i) = \lambda \sum a_i v_i = \lambda f(v) \end{cases}$$