Note Title 9/18/2020

$v \neq 0$

$$f_v(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$

Th. Se f è differenziabile in x_0 allora ha tutte le derivate direzionali e, inoltre,

$$\boxed{f_v(x_0) = df(x_0, v)} \quad (= A(v))$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0, e_i)$

e_i base canonica

siccome A è lineare $A(v) = A\left(\sum v_i e_i\right) = \sum v_i A(e_i)$

$$A(e_i) = f_{e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

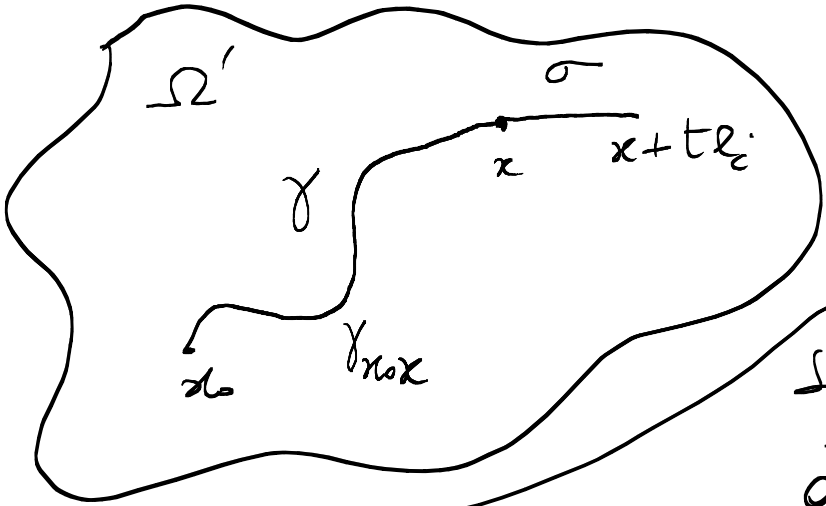
$$f_v(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \nabla f(x_0) v$$

$A:\Omega\to\mathbb{R}^n \qquad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n \qquad A\in C^0(\Omega)$

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A \qquad \forall\, \gamma_1,\gamma_2 \in C^0\big([0,1];\Omega\big) \qquad \begin{array}{l}\gamma_1(0)=\gamma_2(0)\\ \gamma_1(1)=\gamma_2(1)\end{array}$$

$\boxed{\gamma\in C^1}$

Ω' sottoinsieme connesso di Ω



$$f(x)=\int_{\gamma_{x_0x}} A \qquad \forall x\in\Omega'$$

$$= \int_0^1 \sum_i^n A_i(\gamma(t))\,\dot\gamma_i(t)\,dt$$

Si vuole provare che f è un potenziale di A ($\nabla f\equiv A$ su Ω')

$$\boxed{\nabla f(x)=A(x) \quad \forall x\in\Omega'} \equiv \boxed{f_{x_i}(x)=A_i(x) \quad \forall x\in\Omega'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} =$$

$x \quad x+te_i$

$$\boxed{\sigma(s) = x+se_i \quad s\in[0,t]}$$

$\dot\sigma = e_i$

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A = \int_0^1 A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt$$

$$f(x+te_i) = \int_\gamma A + \boxed{\int_\sigma A} =$$

$$= \int_\gamma A + \int_0^t \underbrace{A(x+se_i)\cdot e_i}_{\substack{A_i(x+se_i) \\ (\dot\sigma)}} ds$$

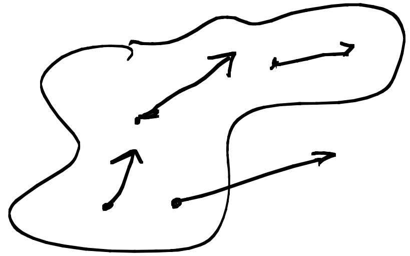
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\cancel{\int_\gamma A} + \int_0^t A_i(x+se_i)\,ds - \cancel{\int_\gamma A}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}\int_0^t A_i(x+se_i)\,ds}_{\text{media (integrale)}} \underset{\substack{\text{Th. media} \\ \text{f. \underline{continue}}}}{\overset{\exists h\in[0,t]}{=\!=}} \lim_{t\to 0} A_i(\underbrace{x+he_i}_{x}) = A_i(x)$$

$t\to 0 \Rightarrow h\to 0$

$$A : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$ lineare rispetto alla II variabile



$$A(x) \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega$$

$$\alpha(x, w) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{x = x_0 + w}$$

A campo $\quad A : \Omega \to \mathbb{R}^n$

forma associata ad A $\quad \alpha(x, w) = \underbrace{\overbrace{A(x)}\, w}_{\in \mathbb{R}}$ lineare per le proprietà del prodotto scalare

---

→ $\alpha(x, w)$ è una forma lineare in w $\quad \exists v \in \mathbb{R}^n : \alpha(x, w) = v w$

→ $A(w)$ è lineare $\quad A(w) = A\left(\sum w_i e_i\right) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{1}^{n} w_i \underbrace{A(e_i)}_{= a_i} = \boxed{w \cdot a}$

campo associato

$$\boxed{A(x) = v}$$

$$\lim_{\infty} 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

segno degli autovalori

lim (forma quadratica)

$\bar{i}$:

$+\infty$ se $\bar{i}$ def. >0

$-\infty$ se $\bar{i}$ def. <0

N.E. in tutti gli altri casi salvo il caso ident. nullo per cui il lim è 0.

forma quadratica

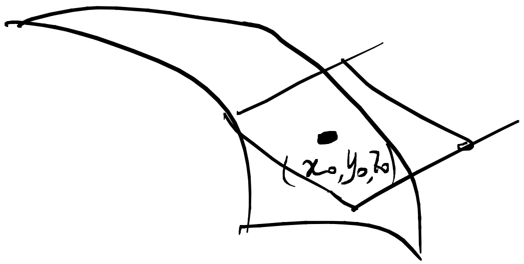
$$\lambda|x|^2 \leq \alpha(x) \leq \Lambda|x|^2$$

λ min. autov.

Λ max autov.

$\phi : \Delta \to \mathbb{R}^3 \qquad \phi \in C^1(\Delta) \qquad \phi$ è iniettiva su $\mathring{\Delta}$

$$\phi_u \times \phi_v \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Delta$$



Se $(x_0,y_0,z_0) \in \phi(\Delta)$

$\exists (u_0,v_0) \in \Delta \qquad \phi(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$

Il vettore $\nu(u_0,v_0)$ normale a $\phi(\Delta)$ (sostegno di ϕ) in (x_0,y_0,z_0)

è

$$\nu(u_0,v_0) = \phi_u(u_0,v_0) \times \phi_v(u_0,v_0) = (a,b,c)$$

basta

Per scrivere il piano per (x_0,y_0,z_0) normale a $\phi(\Delta)$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$f \qquad f' \equiv \begin{cases} \text{la derivata prima se } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{il vettore delle derivate prime se } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ (f_1', f_2', \dots f_n') \\ \text{il gradiente se } f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \text{jacobiano se } f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{cases}$

$$\alpha(x_1, \dots x_n; \underset{w_1}{dx_1}, \dots, \underset{w_n}{dx_n}) = \sum_{1}^{n} \underline{\alpha_i(x_1 \dots x_n)} dx_i$$

è di classe C^α se sono tali tutti i coeff. α_i

funzioni scalari

$$\boxed{\overset{\alpha_1(x,y)}{(x+y^2)} \underset{w_1}{dx} + \overset{\alpha_2(x,y)}{(\sin x^2)} \underset{w_2}{dy}}$$

polinomio $\subseteq C^\infty$ $\qquad C^\infty \qquad \subseteq C^\infty$

$x_n \in \mathbb{R}^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\lim x_n = \infty}$ Succ. divergenti

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \ |x_n| > \varepsilon}$$

---

x_n è non limitata se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |x_\nu| > \varepsilon$$

$0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, 0, n, 0, n+1, \dots$

NON LIMITATA

ma NON è DIVERGENTE

(oscilla!)

Un polinomio omogeneo di grado α è una funzione α-omogenea

$x^2 y$ è 3-omog.

$x^2 y^2$ è 4-omog.

$x^2 y + x^2 y^2$ NON è omog.

$f(tx) = t^\alpha f(x)$

$$\boxed{f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2} \text{ è 1-omog.}}$$

$t>0$

$$f(tx,ty) = \left(t^2(x^2+y^2)\right)^{1/2} = t f(x,y) = t^\alpha f(x,y) \quad \alpha = 1$$

$t(x,y)$

1-omog.

Ω è convesso se $\forall x, y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0,1]$

$(1-\lambda)x + \lambda y \in \Omega$

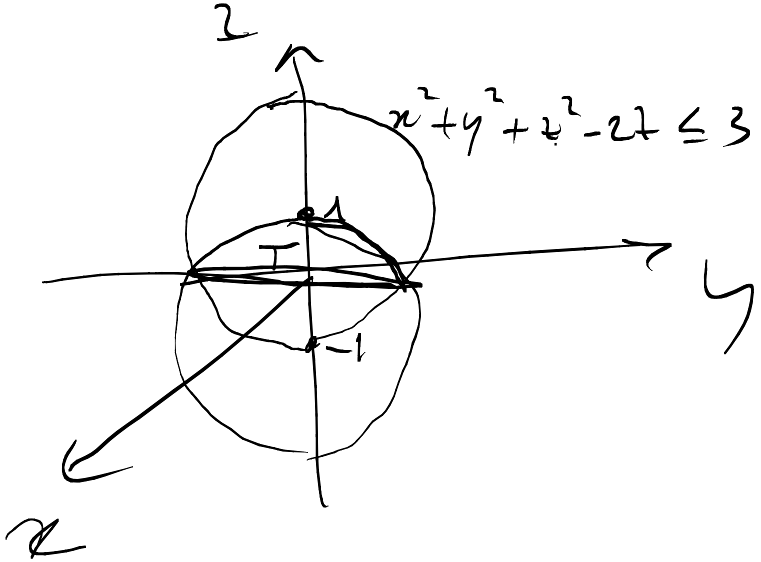
Cioè

$\forall x, y \in \Omega \quad \overline{xy} \subseteq \Omega$

$\{x^2+y^2+z^2-2z \le 3\} \cap \{x^2+y^2+z^2+2z \le 3\}$ Volume

$x^2+y^2+(z-1)^2 \le 4$ $\quad$ $x^2+y^2+(z+1)^2 \le 4$

Sfere di centri $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ con raggio uguali 2

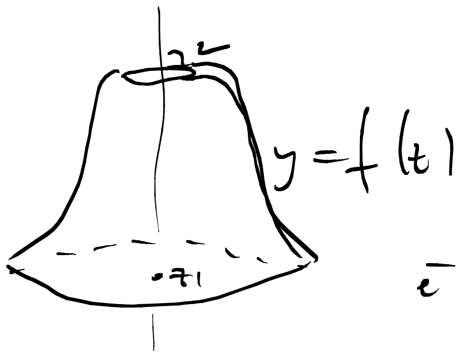


T è il solido di rotazione (attorno a z) generato dal grafico di

$x=0 \Rightarrow y^2+z^2-2z=3$

$y=\sqrt{3+2z-z^2}$

volume di



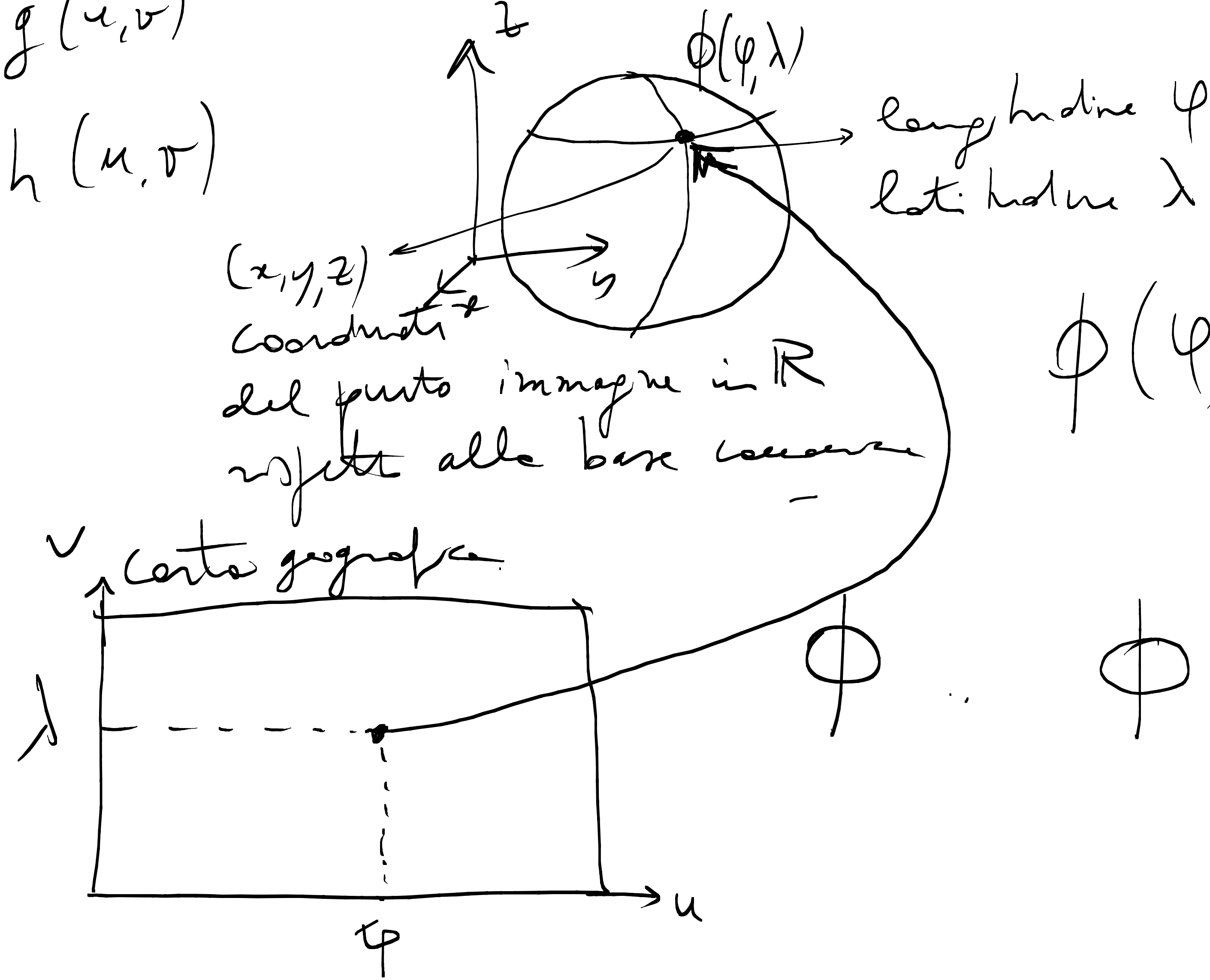
è $\pi \int_{z_1}^{z_2} f^2(z)\,dz$

$$x = f(u,v)$$

$$y = g(u,v)$$

$$z = h(u,v)$$

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \\ h(u,v) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



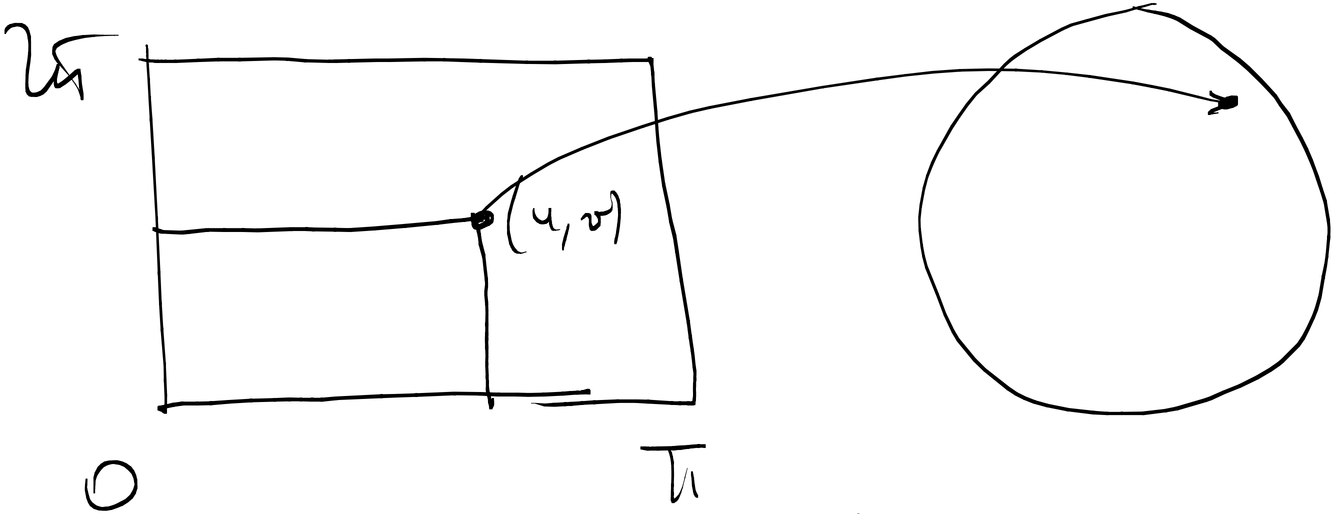
$$\phi(\varphi,\lambda)$$

$$\phi : \underset{(u,v)}{\Delta} \to \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}$$

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \begin{matrix} = f(u,v) \\ = g(u,v) \\ = h(u,v) \end{matrix}$$

$u \in [0, \pi] \approx$ latitu

$v \in [0, 2\pi] \approx$ longh.



$\Phi : (u,v) \mapsto (x,y,z)$

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2 \le 1$$

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$x^2+y^2 = \rho^2$$

$$\rho^2 \le 1$$

$$0 < \rho \le 1$$

θ arbitrario

$$\int_T$$

T $\quad \boxed{x^2+y^2-2x \le 0} \quad \boxed{(x-1)^2+y^2 \le 1}$

$$\rho^2 - 2\rho\cos\theta \le 0 \qquad \rho > 0$$

$$\rho \le 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta > 0$$

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho}$$

$$\rho \in \left]0, 2\cos\theta\right]$$

$$\boxed{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

$\alpha = \underline{x}\,dy + \underline{y}\,dx$ $\qquad$ dom $\alpha = \mathbb{R}^2$ convesso $\Rightarrow$ sempl. connesso

$$f: \begin{cases} f_x = y \Rightarrow f = xy + c(y) \\ \boxed{f_y = x \quad = f_y = x + c'(y)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\nabla f \equiv A \Rightarrow df = \alpha$ $\qquad$ $c'(y) = 0 \Rightarrow c$ costante

$$\boxed{f(x,y) = xy + c \quad \text{(tutte le primitive)}}$$

$\gamma : [0,1] \to \Omega$ è omotopa a $\sigma : [0,1] \to \Omega$ se
$\gamma(0)=\sigma(0)$ $\gamma(1)=\sigma(1)$

compiti e forme ($\underline{U}$)

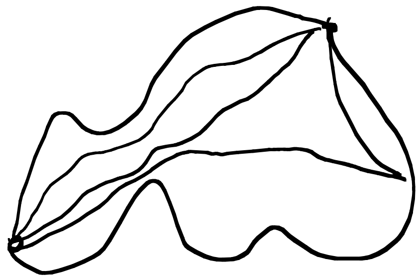
esiste $h : [0,1] \times [0,1] \to \underline{\Omega}$ $\underline{\text{continua}}$

tale che

$$h(0,t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$h(1,t) = \sigma(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

γ



σ

λ fissato in $[0,1]$ $h(\lambda, t)$ è una curva che si deforma da γ a σ

γ, σ sono chiuse ($\underline{\text{lo stesso}}$)

Ω è sempl. connesso se $\forall \gamma$ chiusa
$\exists\, h : [0,1]\times[0,1] \to \Omega$: $\exists\, x_0 \in \Omega$
$h(0,t) = \gamma(t)$ $h(1,t) = x_0$ $\forall t \in [0,1]$

OMOTOPIA = DEFORMAZIONE

SUPERFICIE CARTESIANA $\Rightarrow$ grafico di f

superficie parametrica $\Rightarrow$ funzione da Δ a $\mathbb{R}^3$

f diff. in Ω $\qquad \exists A$ lineare :

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{\|w\|}\left[f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall v \neq 0 \ \exists \ f_v(x_0) = A(v)$$

$$\Downarrow$$

$$A(v) = A\left(\sum_1^n v_i e_i\right) = \sum_1^n v_i \underbrace{A(e_i)}_{\Downarrow \, f_{x_i}} = \nabla f \, v$$

$$f'(x_0) = \left\{ \right.$$

$$\boxed{df(x_0, v) = \underbrace{f'(x_0)}\,\underbrace{v}}$$

$$\lim_{0} \frac{\left|f(x_0+w) - f(x_0) - \alpha w\right|}{|w|} = 0$$

$$\|$$

$$\left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0) - \alpha t}{t}\right| \longrightarrow 0$$

$$\left|\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} - \frac{\alpha \cancel{t}}{\cancel{t}}\right| \longrightarrow 0$$

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

dominio scalare

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_n(x) \end{pmatrix}$$

f è differenziabile in x_0 se

1) $\exists\, f'(x_0)$ $\quad \big(df(x_0, w) = f'(x_0)\,w\big)$

2) $\exists\, \dot\gamma_1(x_0) \dots \dot\gamma_n(x_0)$

$$d\gamma(x_0, w) = \dot\gamma(x_0)\, w$$

prodotto scalare (w) per vettore $\dot\gamma(x_0)$

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \phi : \Delta \to \Omega$$

$$\boxed{\int_{\phi} f = \int_{\Delta} f(\phi(u,v)) \underbrace{\left| \phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \right| du\, dv}}$$

Segmenti contigui