Note Title 7/21/2020

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$y = f(x)$$

$$x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0, \dots, y_n^0$$

$$\partial$$

$$\boxed{g_i = f_i(x_1 \dots x_n) - y_i = 0}$$

$$\begin{cases} g_1(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

δ $\quad \varphi : B_\delta(y_1^0 \dots y_n^0) \to \mathbb{R}^n$ $\quad x = \varphi(y)$

$$x^0 = \boxed{\varphi(y_0)}$$

$$g(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in B_\delta(y_1^0 - y_n^0)$$

$$\varphi'(y) = -\frac{g_y(\varphi(y), y)}{g_x(\varphi(y), y)} \quad \forall y \in B_\delta(y^0)$$

$$\det \frac{\partial(g_1 \dots g_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_n^0) \neq 0$$

$$g(\overbrace{\varphi(y)}^{x}, y) = 0$$

$$\boxed{f(\varphi(y)) = y}$$

CN $\underline{A \in C^0}$ sia integrabile è che $\int_\gamma A$ non dipende dal cammino

$\Updownarrow$

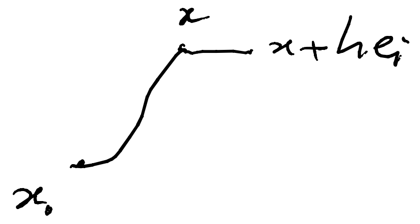
CN $A \in C^0$ " " $\int_\gamma A = 0$ $\forall \gamma$ chiuse

---

CN $A \in C^1$ sia integrabile è che $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$ $\forall i,j = 1..n$

(rotore)

CNS



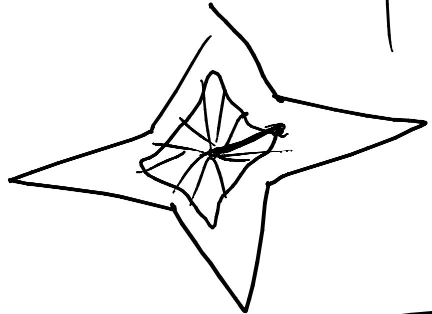
Th. invarianza omotopica SOLO ENUNCIATO

$\Downarrow$

CNS se Ω è semplic. connesso allora ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante (su cui l'integrale di qualsiasi A è 0)

Th Se Ω è stella $\Rightarrow$ è semplicemente connesso

(ogni curva chiusa si può deformare nel polo



$x_0 = 0$ $\quad h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t)$

CAMPI E FORME II

$x_0 \neq 0 \Rightarrow x_0 + (1-\lambda)(\gamma(t) - x_0)$

$f(x,y) = \sqrt{1-\cos(x^2+y^2)}$ $(0,0)$ $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^2$

1) f è continua su $\mathbb{R}^2$ (perché composta di funz. continue)

2) <u>E' derivabile?</u> (NON SI POSSONO USARE LE REGOLE DI DERIV. DI F. COMPOSTE, perché $\sqrt{t}$ non è deriv. in $t=0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(h,0) - f(0,0)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos h^2}}{h} = 0 \qquad 1-\cos h^2 \sim \frac{1}{2}h^4$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos h^2}}{\sqrt{h^4}} \cdot \frac{\sqrt{h^4}}{h} \to 0 \qquad \frac{h^2}{h} \to 0.$$

$1-\cos t \approx t^2$

$h^2 = t$ $\qquad \sqrt{\frac{1-\cos h^2}{h^4}} \to \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{array}}$$

3) Candidato diff. $A(\underbrace{h,k}_{w}) = \nabla f(0,0)\, w = 0h + 0k \equiv 0$

f è diff. se e solo se è nullo il

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(h,k) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{A(h,k)}^{=0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{\sqrt{1-\cos(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}} \underset{t=\sqrt{h^2+k^2}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos t^2}}{t}$$

$$\frac{1-\cos t^2}{t^4} \cdot \frac{t^4}{t} \to 0$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$\sqrt{t^3} \underset{t\neq 0}{=} \frac{1}{2\sqrt{t^3}}\, 3t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\sqrt{t^3} = t^{3/2}$$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ si dice <u>generalmente</u> <u>regolare</u> se

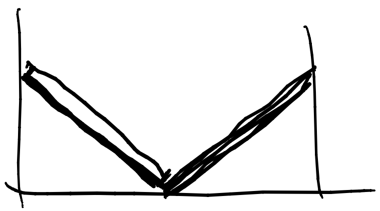
$\exists$ partizione di $[a,b]$ $\quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tale che

γ è regolare su $[t_i, t_{i+1}]$ $\quad \forall i = 0 .. n-1$

$\Downarrow$

$\gamma \in C^1[t_i, t_{i+1}] \; + \; \dot{\gamma}(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$ $\qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$ $\qquad \boxed{\dot{\gamma}(0) \text{ non esiste}}$



$t_0 \quad t_1 \quad t_2$

$t_0 = -1 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 1$

1) $f \in C^1$(aperto) è ivi differenziabile $\qquad 1-\cos(x^2y^2)$

Se non si può applicare la differenziabilità di funzioni composte

2) f è continua? Se non lo è NON E' DIFFER.

(CN perché $\exists\, df$ è che $f \in C^0$)

3) f ha tutte le derivate parziali ($\exists\, \nabla f(..)$?) Se no,

NON E' DIFF (CN f sia diff. è che $\exists\, f_v(x_0)\ \forall v \neq 0$)

SI USA IL LIMITE DEI RAPPORTI INCREMENTALI

INOLTRE se esiste ∇f si può verificare se $\underbrace{\nabla f(x_0) w}_{=A(w)}$ è df

4)
$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} \text{ fa } 0\,?$$

$f(x,y) = |x^2+y^2|$ in $(0,0)$

NON si può applicare la derivata delle funzioni composte in $(0,0)$ $\quad t \to |t|$ Non è deriv. in 0

— f è continua (composto di funzioni continue)

— $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h^2|-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h} = 0$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$

— $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ "df"$\big((0,0),(h,k)\big) = f_x h + f_y k =$

$= 0h + 0k = 0$

— $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\overbrace{f(h,k)}^{f((0,0)+(h,k))} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{A(w)}_{=0}}{\sqrt{h^2+k^2} = |w|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{|h^2+k^2|}\ \text{2-omog.}}{\cancel{\sqrt{h^2+k^2}}\ \text{1-omog.}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}|x^2|$$

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha > 0$

$\alpha > 1$

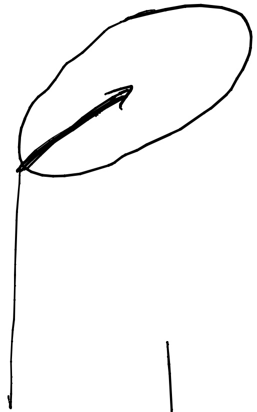
$\alpha - 1 < 0$

$\boxed{\alpha \leq 1}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\alpha = 0$

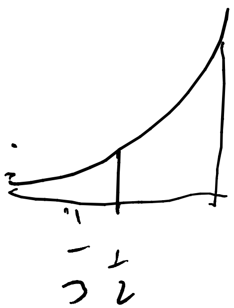
$f: \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

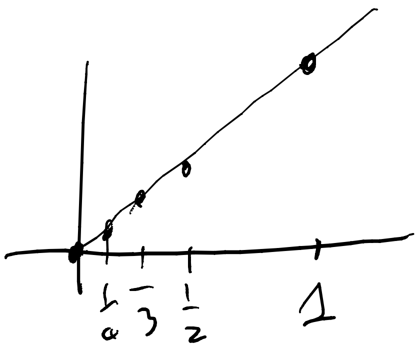


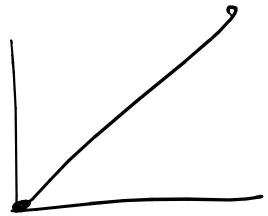
$f(x) = x$

in $[0,1]$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$$







$x > 0$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$

$\gamma \in C^1$ (anche a tratti)

$$\boxed{\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt}$$

Formula generale

Caso cartesiano $\quad \Lambda(\operatorname{graph} f)$

$\operatorname{graph} f = \{ (x,y) : x \in \operatorname{dom} f \quad y \in \operatorname{cod} f \quad y = f(x) \}$

$g(x,y) = f(x) - y$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \operatorname{dom} f$$

Applicando la formula generale nel caso parametrico $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$

$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$ $\xrightarrow{\Lambda(\operatorname{graph} f)}$ $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$. è la lunghezza del grafico relativo al dominio $[a,b]$

$$"\gamma(t)" \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

coord. polari

$$\gamma(t) \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos\theta(t) \\ \rho(t)\sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

coord. cartesiane

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta(t) - \rho(t)\sin(\theta(t))\,\dot\theta(t) \\ \dot\rho\sin\theta(t) + - - - - - - \end{pmatrix}$$

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2}$$

Formula generale per la curve in coord. polari

$\rho, \theta : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\Lambda\left(\text{curva polare}\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix}\right) = \int_a^b \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2}\,dt$$

$\rho = f(\theta)$ $\quad "\gamma"(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2} =$$

Nel caso della spirale $\rho = \theta$ $\quad f(t) = t$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ $\qquad$ $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^N$

invertibile

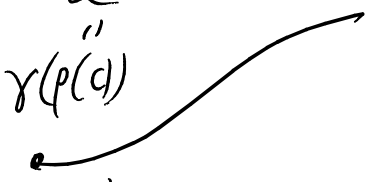
sono dette equivalenti (equiverse) se $\exists\, \rho : [c,d] \to [a,b]$ $\quad \dot\rho > 0 \ \forall t \in [c,d]$

tali che

$$\boxed{\sigma(t) = \gamma(\rho(t))}$$

t in $[c,d]$ $\quad$ $\sigma(t)$

$a = \gamma(\rho(c))$



$\sigma(c)$

Stesso sostegno ma diversa legge oraria (diverse scale di tempo

Sono dette equivalenti se $\exists\, \rho$ invertibile fra $[c,d]$ e $[a,b]$ (biiettiva) tali che $\sigma(t) = \gamma(\rho(t))$ $\forall t \in [c,d]$ $\quad \rho(c) = a$, $\rho(d) = b$

hanno lo stesso verso se ρ strett. crescente

hanno verso opposto se ρ è strett. decresc. $\rho(c) = b$ $\quad \rho(d) = a$

$$H(f) \quad \left(f_{x_i x_j}\right) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} f & \partial^2_{x_1 x_2} f & \cdots & \partial^2_{x_1 x_n} f \\ \partial^2_{x_2 x_1} f & \partial^2_{x_2 x_2} f & - & - \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \partial^2_{x_n x_n} f \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$f_{x_i x_j} \equiv \left(f_{x_i}\right)_{x_j}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

$$\| \quad f_{x_k x_k}$$

$f_x = 2xy$

$f_y = x^2$

$f_{xx} = 2y$ $\qquad f_{yy} = 0$

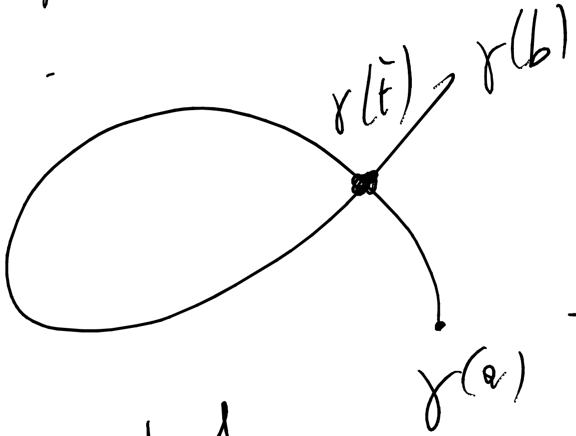
$f_{xy} = 2x$

$f_{yx} = 2x$

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

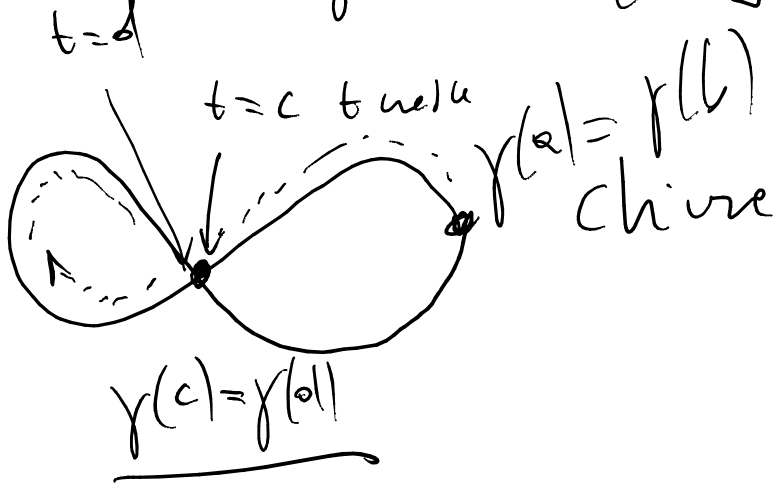
$\gamma(t)$ è semplice $t \in [a,b]$ se è iniettiva su $]a,b[$

$\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$ è semplice



NO

$t \in]a,b[$



Chiusa ma non semplici