Note Title 7/21/2020

Se $\dim X = n$ $\quad u_1 \dots u_m$, $\underline{m > n} \Rightarrow$

$u_1 \dots u_m$ sono dipendenti

Th. max numero di vettori indip.

$\dim X = n$ $\quad u_1 \dots u_k$ indipendenti $k < n$

allora $v_{k+1} \dots v_n$: $u_1 \dots u_k\, v_{k+1} \dots v_n$ è una base

$X \supset \langle u_1 \dots u_k \rangle$ $\quad \exists\, v_{k+1} \in X \setminus \underline{\langle u_1, \dots, u_k \rangle}$

$\quad\Downarrow$

stretto $\quad$ è indip. da $u_1 \dots u_k$

$X \neq \langle u_1 \dots u_k \rangle$ $\quad v_{k+1} \neq 0$

se $k+1=n \Rightarrow u_1 \dots u_k v_{k+1}$ è il completamento per il Th. generatori

altrimenti

$$X \supsetneq \langle u_1 \dots u_k, v_{k+1} \rangle$$

$$\exists \underbrace{v_{k+2} \notin \langle u_1 - u_k, v_{k+1} \rangle}$$ ed è quindi indipendente da $u_1 \dots u_k v_{k+1}$

$$v_{k+1} = \sum_1^k \lambda_i u_i$$

$$v_{k+1} \in \langle u_1 - u_k \rangle$$

$\langle u, v \rangle$

$[u, v]$ $\Rightarrow$ prodotto scalare

$u \cdot v$

---

1) $uu \geq 0 \quad \forall u \in X$

2) $uu = 0 \iff u = 0$

Prodotto scalare è una forma quadratica definita positiva

3) $(u+v)w = uw + vw$

4) $\underbrace{(\lambda u)}_{\text{I fattore}} v = \lambda (uv)$

Il prodotto scalare è lineare rispetto al primo fattore

AL_2.1

5) $uv = vu \quad \forall u, v$ se X è uno spazio reale (simmetrico)

$uv = \overline{vu} \quad \forall u, v$ se X è uno spazio complesso (emisimmetrico) nel caso **reale** il prodotto scalare è **bilineare**

cioè

$u \to uv$ è lineare $\forall v$ fissato in X

$v \to uv$ " " $\forall u$ fissato in X

$$(v_1+v_2) \to \underline{u(v_1+v_2)} \underset{\text{simmetria } 5)}{=} (v_1+v_2)u \underset{3)}{=}$$

linearità

$$= v_1 u + v_2 u \underset{5)}{=} \underline{uv_1 + uv_2}$$

$\boxed{AL\_2.2}$

$$\underset{\text{I fattore}}{u}\ \underset{\text{II fattore}}{v}$$

Caso complesso

$$u(\lambda v) = \overline{(\lambda v)u} \underset{4)}{=} \overline{(\lambda v u)} = \bar\lambda\, \overline{vu} = \bar\lambda\, uv$$

$$(\lambda u)v = \lambda\, uv$$

$$u(\lambda v) = \bar\lambda\, uv$$

I fattore

II fattore