$X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

Lemma fond.

I) $u_1 \in \langle u_2, \dots, u_n \rangle$? $\Downarrow$

sì $\Longrightarrow \langle u_1, u_2, \dots u_n \rangle = \langle u_2, u_3, \dots, u_n \rangle$

u_1 si può togliere

NO u_1 non si toglie perché NON è combinazione degli altri

II) u_2 è combinazione degli altri? Se sì, si elimina, se no si lascia

Dopo n passi resta una base

$\left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle$ $\quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$

sistema lineare

$u_1\, u_2 \dots u_n \mid 0$

seleziono i pivot di questo sistema

$$\boxed{u - u_v \perp v}$$

$$\left[u - \underbrace{\frac{uv}{|v|^2}}_{u_v} v\right] v = uv - \frac{uv}{|v|^2}\,\underbrace{v \cdot v}_{|v|^2} = uv - uv = 0$$

$e_1 \dots e_n$ ortogonali $\boxed{e_i e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}}$

$$u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle} = \sum_1^n u_{e_i}$$

$$\left[u - \sum_1^n \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i\right] e_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$\underbrace{u e_j - \sum_{1}^{n} \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i e_j}_{\text{ho tutti gli addendi nulli salvo } e_i e_i \ (i=j)} = u e_j - \frac{u e_j}{\cancel{|e_j|^2}} \cancel{e_j e_j} = 0$$

$b = a_1 + a_2 + a_3$

addendi

$A_i \in \mathbb{R}^n$

$$A_1 \ A_2 \cdots A_p \mid 0$$

se tutte le colonne sono pivot è <u>iniettiva</u>

se le colonne contengono n pivot, è suriettiva

biettiva $\iff$ iniettiva + suriettiva.

$$\underbrace{\dim X}_{\substack{\shortparallel \\ n}} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} A}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \underline{\dim A(X)}$$

X è di dim $< \infty$

$e_1 \dots e_n$ base di X $\quad \dim X = n$

$\forall x \in X \quad x = \sum x_i e_i \quad A(x) = A\left(\sum_1^n x_i e_i\right) =$

$$= \sum_1^n x_i A(e_i)$$

quindi $A(e_1), A(e_2) \dots A(e_n)$ generano $A(X)$

SONO INDIPENDENTI ?

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i A(e_i) = 0$$

$$\parallel$$

$$A\left(\sum_{1}^{n} \alpha_i e_i\right) \not\Longrightarrow \sum_{1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} A$$

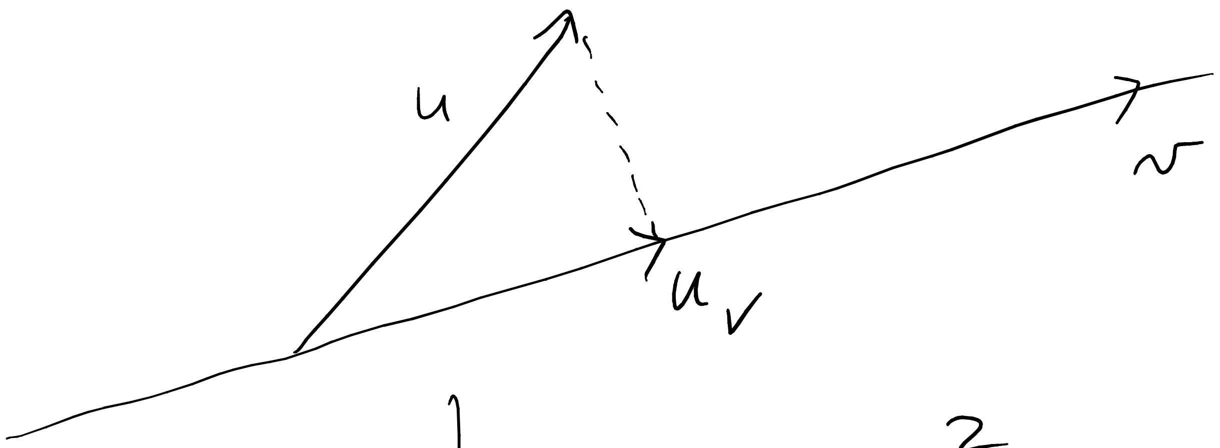
$$\Downarrow \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}$$

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i e_i = 0$$

$$\Downarrow \quad e_1 \dots e_n \text{ base di } X$$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$$\boxed{\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y}$$



$\boxed{AL\_2.1}$

$$u_v = \frac{uv}{|v|^2}\,v, \qquad \frac{uv}{|v|^2} = \bar{\lambda}$$

$$\underline{|u-u_v|^2 \le |u+\lambda v|^2}$$

$$|u+\lambda v|^2 = |\underbrace{u-u_v}_{\perp} + \underbrace{u_v+\lambda v}_{=\,\mu v}|^2 \underset{\text{Pitagora}}{=} |u-u_v|^2 + \underbrace{|u_v+\lambda v|^2}_{\ge 0}$$

per il th. della proiezione

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle^{\perp} = \{ w : \underline{w A_i = 0} \}$$

$$\begin{cases} A^1 w = 0 \\ A^2 w = 0 \\ \vdots \\ A w = 0 \end{cases}$$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A_2} \right\rangle^{\perp} =$$

$$\{ w = (w_1, w_2, w_3, w_4) : \quad A_1 w = 0 \text{ e } A_2 w = 0$$

$$\begin{cases} 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 + 3 \cdot w_4 = 0 \\ 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 + 2 \cdot w_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\underbrace{A(u)}_{\in A(X)} = \underbrace{\lambda u}_{\in \operatorname{dom} A}}$$

devono essere uguali

$A : X \to X$

stesso spazio

la matrice associata è quadrata

$A : X \to Y$ ip. $\dim X = \dim Y$

A iniettiva $\quad \dim A(X) = \dim X$ (th. Grassmann)

$A(X) = \{y \in Y;\ \exists x\ A(x) = y\}$ $\quad \dim A(X) \le \dim Y = \dim X \Rightarrow \dim A(X) = \dim Y$

perché $\boxed{A(X) \subseteq Y}$ di uguali dimensioni $\Rightarrow A(X) = Y$

$\mathbb{R}^3$ $\left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ sist. ortogonale

$$\boxed{\begin{aligned} e_1 e_1 &= 1 \neq 0 \\ e_2 e_2 &= 1 \neq 0 \\ e_1 e_2 &= 0 \end{aligned}}$$

$A(u) = u'$ $X = \langle \underset{e_1}{\sinh t}, \underset{e_2}{\cosh t} \rangle$

$\underline{1^a}$ Scegliere una base di X; in questo caso $\underset{e_1}{\sinh t}, \underset{e_2}{\cosh t}$

$\underline{2^a}$ Matrice associata ad A ed a e_1 e e_2

$A(e_1) = (\sinh t)' = \cosh t = 0 \sinh t + 1 \cosh t$

$A(e_2) = (\cosh t)' = \sinh t = 1 \sinh t + 0 \cosh t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{3^a}$ diagonalizziamo A

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

A è diag. perché ha due autov. distinti

$\underline{4^a}$| Trovare autovettori

$$\lambda = 1 \qquad \begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow -u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\lambda=1}{\uparrow}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -u_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base spettrale di A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\lambda=-1}{-}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5ª Le coordinate degli autovettori della base spettrale della matrice $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ sono le coordinate degli autovettori di A

Un autovettore di A sarà $1\sinh t + 1\cosh t = e^t$

L'altro si trova usando -1 e 1 $\quad -1\sinh t + 1\cosh t = e^{-t}$

la base spettrale di A è $\{e^t, e^{-t}\}$

$A : X \to X$ euclideo si dice autoaggiunto se

$$\boxed{(A(u))v = u(A(v)) \quad \forall u, v}$$

$A(u)$ è il vettore che A associa a u

Il prodotto scalare di u per $A(v)$ è uguale a quello di u per $A(v)$

ENRICO GIUSTI

ANALISI MATEMATICA II

BORINGHIERI