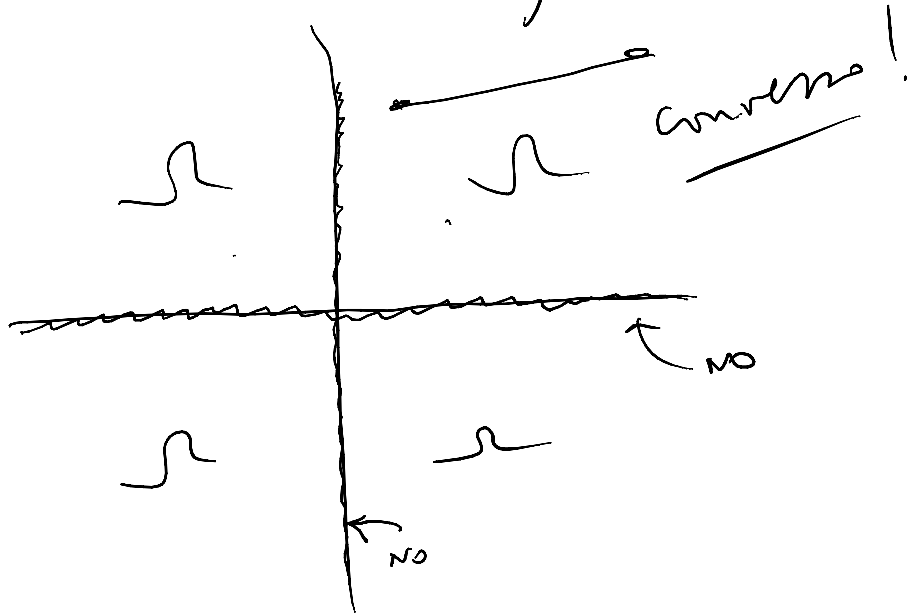
CAMPI E FORME IN PRATICA

Note Title 5/29/2020

$$\left(\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{xy^2}\right) = A(x,y) \qquad A: \underbrace{\mathbb{R}^2\setminus\{xy=0\}}_{\Omega} \to \mathbb{R}^2$$



$\mathrm{dom}\,A = \mathrm{I}_q \cup \mathrm{II}_q \cup \mathrm{III}_q \cup \mathrm{IV}_q$

dom A è sconnesso, però è unione di 4 insiemi CONVESSI ($\Rightarrow$ STELLA $\Rightarrow$ sempl. connessi)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy^2}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$$

sono uguali

A irrotazionale $\Longrightarrow$ A è integrabile

$\Rightarrow$ $\exists\ f_1$ I quadrante

$\exists\ f_2$ II quadrante

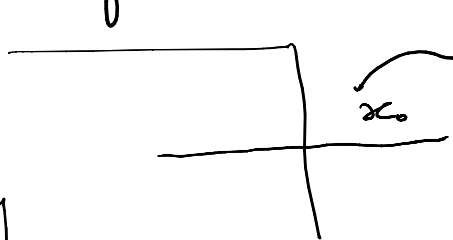
$\exists\ f_3$ III quadrante

$\exists\ f_4$ IV quadrante ;

$$\boxed{\nabla f_i \equiv A \quad \text{su il quadrante } i}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & \text{I q.} \\ f_2 & \text{II q.} \\ f_3 & \text{III q.} \\ f_4 & \text{IV q.} \end{cases}$$

$\nabla f \equiv A$ sul dom A



$$f_1(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A$$

$\exists\ f$:

$$\begin{cases} \boxed{f_x = \dfrac{1}{x^2 y}} \\ f_y = \dfrac{1}{x y^2} \end{cases}$$

$$\boxed{f(x,y) = -\frac{1}{xy} + c(y)}$$

derivando rispetto a y

$$f_y(x,y) = \frac{1}{xy^2} + c'(y) \longrightarrow c = \text{costante}$$

$c'(y) = 0$

sostituendo

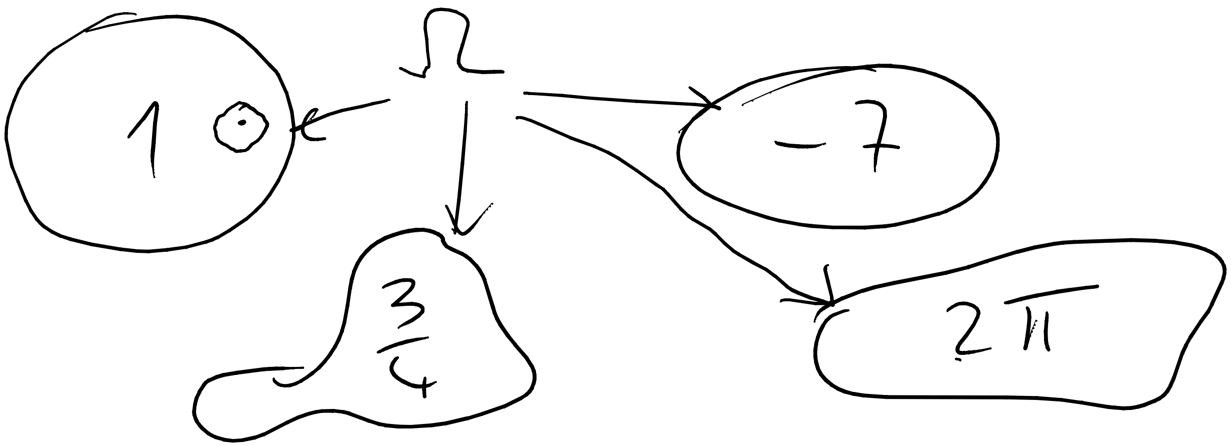
$f(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + \text{cost}$ sono primitive di A. SONO TUTTE? NO!

La differenza di due qualunque primitive di A è una funzione con gradiente nullo sull'unione dei quadranti.

$\varphi = c_2$	$\varphi = c_1$
$\varphi = c_3$	$\varphi = c_4$

Tutte le primitive sono del tipo

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{xy} + c_1 & \text{sul I quadrante} \\ -\frac{1}{xy} + c_2 & \text{" II "} \\ -\frac{1}{xy} + c_3 & \text{sul III "} \\ -\frac{1}{xy} + c_4 & \text{" IV "} \end{cases}$$



Tutte le primitive di $\frac{1}{x}$

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\alpha(x,y,dx,dy) =$
$= \cos y\, dx - (x \sin y + 1)\, dy$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \quad (dx,dy)$

associato

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y \\ -x \sin y - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_x = \cos y \\ f_y = -x \sin y - 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$ è sempl. connesso

rotore $\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos y) = -\sin y$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \parallel$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(-x \sin y - 1) = -\sin y$

campo irrotazionale

La forma è esatta (integrabile)

$f_x = \cos y \implies \boxed{f = x \cdot \cos y + c(y)}$

$$\boxed{f_y = -x \sin y + c'(y)}$$

$f_y = -x \sin y - 1$

sottraendo membro a membro

$$\boxed{c'(y) = -1} \Rightarrow c(y) = -y$$

$$f(x,y) = x\cos y - y$$

1 primitiva

dom. è aperto e connesso

$$x\cos y - y + c \quad c \in \mathbb{R}$$

sono TUTTE LE PRIMITIVE

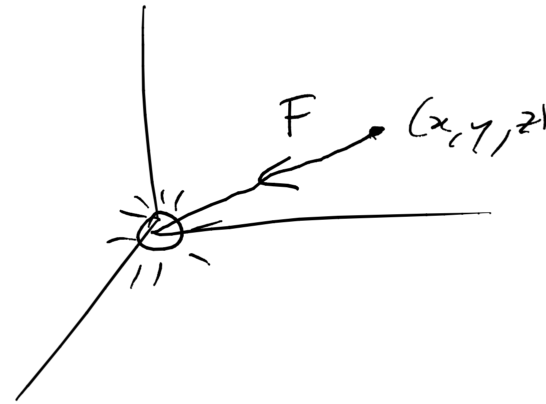
$$\alpha = xy\,dx + a(x,y)\,dy$$

$\exists a?$ tale che α sia chiusa? oppure esatta?

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{\partial}{\partial x}a(x,y) \Rightarrow a_x = x \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}x^2 + c(y)}$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2$ sempl. connesso

POTENZIALE NEWTONIANO



$$F = \underbrace{-}_{\text{verso della forza di gravità}} \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}_{\text{modulo della forza di gravità}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{versore della posizione}}$$

$\boxed{GMm = 1}$

$$F = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

rotore

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad ??? \quad \text{sì}$$

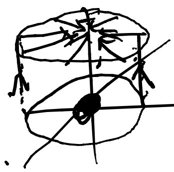
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Il campo è irrotazionale? Sì!

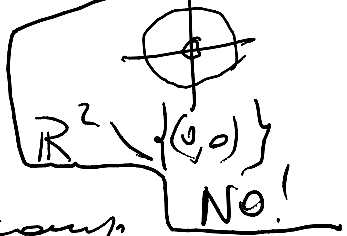
Il dominio è semplicemente connesso?

$$\text{dom}\, F = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

Le curve chiuse può essere allontanate dall'origine prima di deformarle in una costante.



Sì



$\Rightarrow$ Il campo prov. è integrabile