CAMPI IRROTAZIONALI (E FORME CHIUSE)

Note Title 5/26/2020

$\sigma(t) = \gamma(p(t))$ $\boxed{\dot{p} > 0}$ $\int_\gamma A = \int_\sigma A$ A qualsiasi

$\boxed{A \text{ integrabile } (C^0)}$

$\gamma : [a,b] \to \text{dom } A$

$\sigma : [c,d] \to \text{dom } A$

$\int_\gamma A = \int_\sigma A$ purché $\boxed{\begin{array}{l} \gamma(a) = \sigma(c) \\ \gamma(b) = \sigma(d) \end{array}}$

$A^{\in C^0}$ è integrabile $\iff \int_\gamma A = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa.

infinite

INVARIANZA DELL' INTEGRALE

$A \in C^1$ A integrabile ($\exists f : \mathrm{dom} A \to \mathbb{R} : \nabla f \equiv A$ sul $\mathrm{dom} A$)

$$\boxed{f_{x_i} \equiv A_i} \qquad (f_{x_i})_{x_j} = (A_i)_{x_j}$$

$\| $ CLAIRAUT-SCHWARZ

$$(f_{x_j})_{x_i} = (A_j)_{x_i} \implies \boxed{(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i,j}$$

CONDIZIONE DEL ROTORE

ESEMPIO

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad A_1 = y \qquad A_2 = x$$

$$(A_1)_{x_2} = (A_2)_{x_1}$$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$xy = f(x,y)$$

CN perché $A \in C^1$ sia integrabile è che

cond. del rotore $$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall\, i,j = 1..n$$

$$\boxed{(A_i)_{x_j} - (A_j)_{x_i} = 0}$$

DEFINIZIONE

Se $A \in C^1$ verifica la condizione $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$ $\forall\, i,j$ si dirà IRROTAZIONALE, e la sua forma associata si dice CHIUSA.

ESEMPIO: <u>ESISTONO CAMPI IRROTAZIONALI NON INTEGRABILI</u>

$$A(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2},\ -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

l'integrale su $\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$ <u>non</u> è nullo $\Rightarrow$ A <u>NON</u> è integrabile, ma verifica le condizioni del rotore

$$y\,dx - x\,dy = \alpha(x, y; dx, dy)$$

$$\times$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$$ la forma <u>non</u> è chiusa

ROTORE

$$A$$

$$\underline{\mathrm{rot}\,A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

prodotto vettore

∇

rotore di A

$$\boxed{\nabla \times A} \doteq 0 \qquad (A_3)_y - (A_2)_z = 0$$

$A_i \qquad A_j$

$\partial x_i \qquad \partial x_j$

$$(A_j)_{x_i} = (A_i)_{x_j} \qquad \forall\, i,j$$

$$(x^2 y\ ,\ xz\ ,\ x^2+y^2+z^2) = A(x,y,z)$$

$\quad A_1 \qquad\quad A_2 \qquad\quad A_3$

$$\underset{x_2}{\frac{\partial A_1}{\partial y}} \overset{?}{=} \underset{x_1}{\frac{\partial A_2}{\partial x}} \qquad\qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} = x^2 \qquad \frac{\partial A_2}{\partial x} = z$$

sono DIVERSE

il campo è ROTAZIONALE
(cioè NON IRROTAZIONALE)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

è

Sì

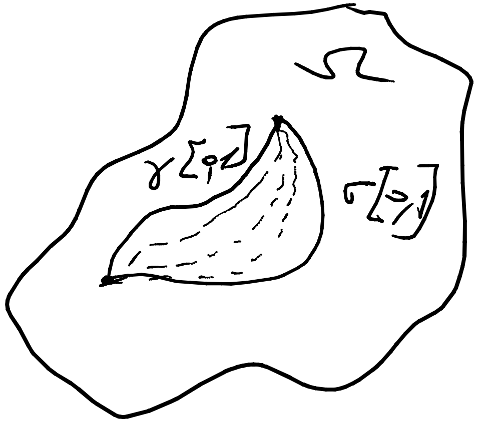
VERIFICARE!

DEFORMAZIONE DI CURVE (OMOTOPIA)

$\gamma : [0,1] \to \Omega$ $\quad$ $\sigma : [0,1] \to \Omega$

$\gamma(0) = \sigma(0)$ $\quad$ γ, σ continue

$\gamma(1) = \sigma(1)$



$h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ con $\boxed{1)\ h \text{ continua}}$

$$\boxed{2) \quad h(0,t) = \gamma(t) \ \forall t \in [0,1] \qquad h(1,t) = \sigma(t) \ \forall t \in [0,1]}$$

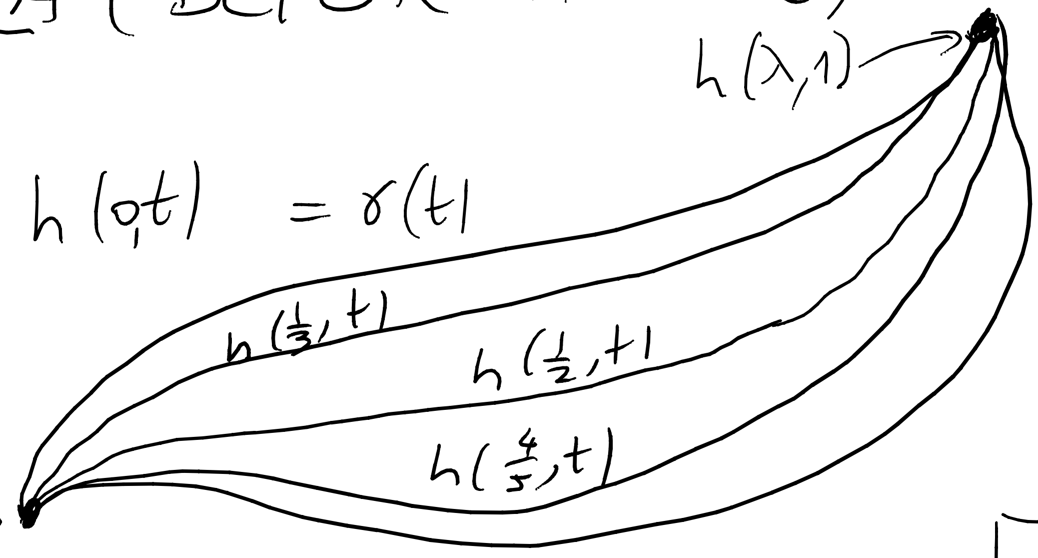
$$\boxed{\begin{array}{l} 3) \ h(\lambda,0) = \gamma(0) = \sigma(0) \\ \quad h(\lambda,1) = \gamma(1) = \sigma(1) \\ \quad \forall \lambda \in [0,1] \end{array}}$$

OMOTOPIA (DEFORMAZIONE) di γ e σ in Ω

$h(\lambda,1)$

$h(0,t) = \gamma(t)$

$= h(\lambda,0)$

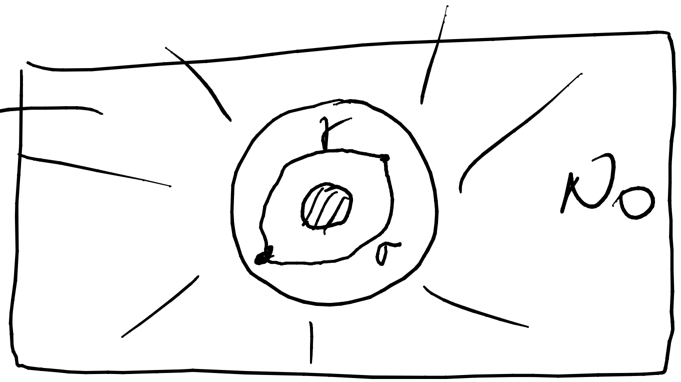


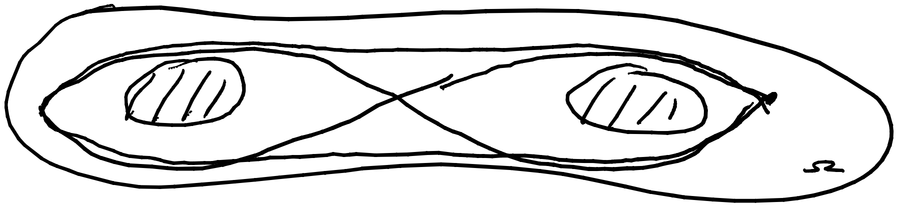
$\sigma(t) = h(1,t)$

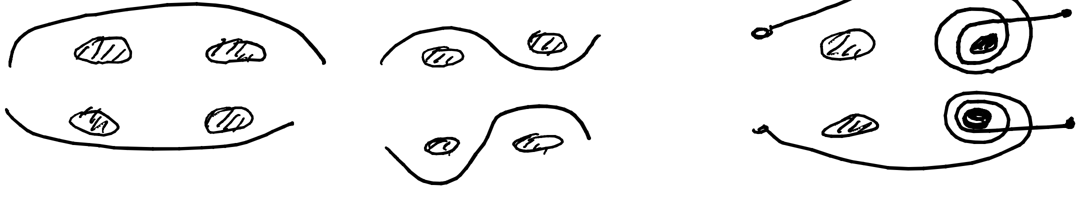
$h(\lambda,t) \qquad \lambda \in [0,1]$

$\qquad\qquad\quad t \in [0,1]$

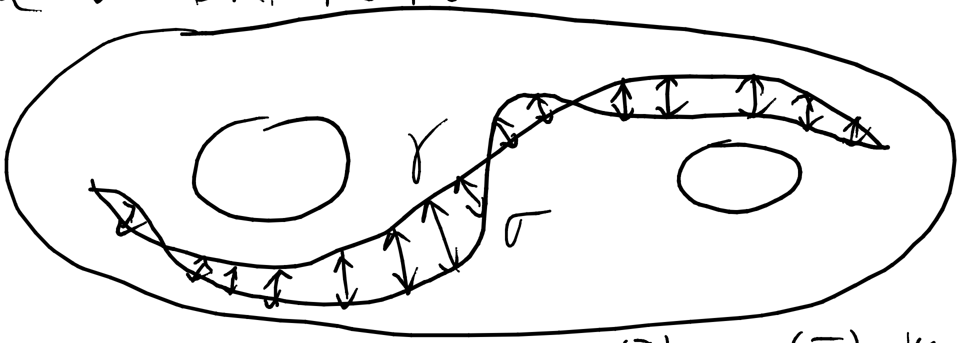
γ e σ NON SONO OMOTOPE







γ e σ OMOTOPE



$\lambda \to h(\lambda, t)$ t fissato

$t \to h(\lambda, t)$ curva che interpola γ e σ per il valore λ

LE FRECCE DEFORMANO $\gamma(\bar{t})$ in $\sigma(\bar{t})$ per vari $\bar{t} \in [0,1]$.

Se A è irrotazionale, $A: \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

e se $\gamma: [0,1] \to \Omega$, $\sigma: [0,1] \to \Omega$, continue,

$\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\gamma(1) = \sigma(1)$, omotope in Ω, <u>allora</u>

$$\boxed{\int_\gamma A = \int_\sigma A}$$

TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA

SOLO ENUNCIATO

DIM PRODI ANALISI II

L'INVARIANZA OMOTOPICA DELL'INTEGRALE

vale anche per le curve chiuse $\gamma, \sigma : [0,1] \to \Omega$

$\gamma(0) = \gamma(1)$ $\quad \sigma(0) = \sigma(1)$ continue

<u>OMOTOPIA</u> di γ e σ in Ω

$h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$

$h(0,t) = \gamma(t)$

$h(1,t) = \sigma(t)$

$t \to h(\lambda, t)$ è chiusa $\forall \lambda \in [0,1]$

$h(\lambda, 0) = h(\lambda, 1)$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$\Longrightarrow$ SE A è IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ $\boxed{\int_\gamma A = \int_\sigma A}$

<u>DEF</u> Ω è detto SEMPLICEMENTE CONNESSO SE OGNI CURVA CHIUSA A VALORI IN Ω È OMOTOPA AD UNA CURVA COSTANTE $\sigma(t) = x_0 \in \Omega$