INTEGRABILITA' DI CAMPI E FORME

Note Title 5/22/2020

C.N. perché $A \in C^0$ sia integrabile è che

$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$ $\quad \boxed{\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A}$ $\quad$ se $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

$\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$

$$\| $$

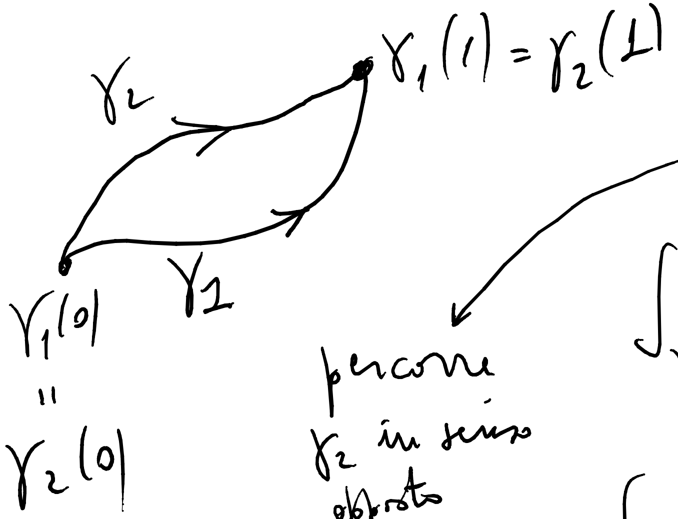
$$f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) = \text{diff. di potenziale}$$

$\gamma_1 : [a,b] \to \text{dom} A$

$\gamma_2 : [c,d] \to \text{dom} A$

$\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$



$\sigma(t) = \gamma_2(1-t)$

percorre γ_2 in senso opposto

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$$\int_{\gamma_1 \oplus \sigma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\sigma} = -\int_{\gamma_2}$$

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

$$\int_{\sigma} = -\int_{\gamma_2} \quad \dot{\rho} < 0$$

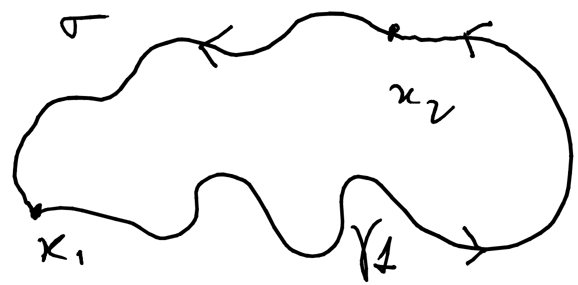
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{\gamma_1 \oplus \sigma} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0}$$

C.N. (e S) $A \in C^0$ sia integrabile è che

$\forall \gamma$ chiusa $\gamma : [0,1] \to \operatorname{dom} A$ si ha

$$\boxed{\int_\gamma A = 0}$$



$$\int_{\gamma_1} A = -\int_\sigma A$$

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

γ_2 come σ orientata all'inverso da x_2 verso x_1

TEOREMA DI TORRICELLI

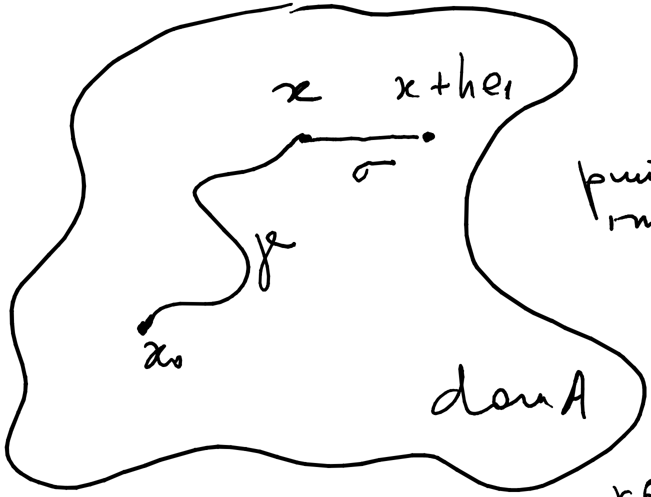
C.S. perché $\boxed{A \in C^0}$ sia integrabile è che

$\int_\gamma A$ non dipende dal sostegno di γ, ma solo dagli estremi.
(cammino)

DIM.

$$F(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A = \underbrace{\int_a^b A(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt}_{\text{esiste perché l'integranda è continua}} \qquad \boxed{\int_a^x f(t)\,dt \overset{f\in C^0}{=} F(x) \;\Downarrow\; F'(x)=f(x)}$$

$\gamma_{x_0 x}$: x_0 punto iniziale, x punto finale



DICO CHE: $F(x)$ è un potenziale (PRIMITIVA) di A, cioè $\nabla F \equiv A$ sul dom A

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{F_{x_i} \equiv A_i \text{ su dom } A}$$

$\gamma \oplus \sigma$ congiunge x_0 e $x+he_1$

$F_{x_1} \equiv A_1$ su dom A

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_1)-F(x)}{h} \overset{?}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_{x_0x}\oplus\sigma} A - \int_{\gamma_{x_0x}} A\right] =$$

curve fra x_0 e $x+he_1$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_{\gamma_{x_0x}} A} + \int_\sigma A - \cancel{\int_{\gamma_{x_0x}} A}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_\sigma A\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h A(\underbrace{x+te_1}_{\sigma})\cdot e_1\,dt =$$

$x+te_1$

$t\in[0,h]$

è il segmento di estremo iniziale x ed estremo finale $x+he_1$

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=A_1$$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h A_1(x+te_1)\,dt}_{\text{media integrale di funzione continua}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{A_1(x+\xi e_1)} \qquad \boxed{\xi\in[0,h]} \qquad \xi?$$

$$\| \Leftarrow \quad h\to 0 \Rightarrow \xi\to 0 \Rightarrow x+\underbrace{\xi e_1}_{\to 0}\to x$$

$$A_1(x)$$

Th. media integrale per integrandi <u>CONTINUE</u>

$\lim_{x\to a} f(x) \longrightarrow f(a)$

se $f\in C^0$