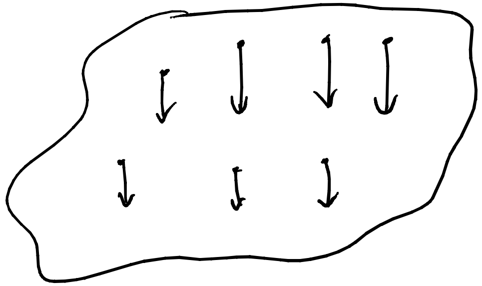
CAMPI VETTORIALI E FORME DIFFERENZIALI LINEARI

MATEMATICA — Problema della primitiva

$$y' = f$$

y' incognita, f nota

FISICA



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \nabla f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^N}{\Omega} \to \mathbb{R}^N .$$

$A : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ sarà detto **CAMPO (VETTORIALE)**

$$df : \underset{x_0 \in}{\Omega} \times \underset{w \in}{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

$w \to df(x_0, w)$ è LINEARE $\forall x_0 \in \Omega$.

$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $w \to \alpha(x_0, w)$ è LINEARE $\forall x_0 \in \Omega$

FORMA (DIFFERENZIALE LINEARE)

PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

1) Se A è un campo su Ω, esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f \equiv A$ su Ω?

2) Se α è una forma su Ω, esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $df \equiv \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^N$

Se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$: $\nabla f \equiv A$ su Ω, A si dirà <u>integrabile</u> ed f si dirà <u>primitiva</u> di A.

Se $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R} : df = \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^N$ α si dirà <u>integrabile</u> ed f si dirà <u>primitiva</u> di α

A integrabile si dirà anche 1) CONSERVATIVO, 2) POTENZIALE

α integrabile si dirà anche 1) ESATTA

f si dirà POTENZIALE

CAMPI E FORME ASSOCIATI

$$\boxed{df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w}$$

$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ <u>fissato x_0</u>

$w \to \alpha(x_0, w)$ lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$\exists\, u \in \mathbb{R}^N : \alpha(x_0, w) = u\, w$ prodotto scalare

Il campo associato ad α è definito ponendo $A(x_0) = u$

$$\boxed{\alpha(x_0, w) = A(x_0)\, w}$$

α ed A sono detti ASSOCIATI se

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(x_0)\, w_i = \sum_{i=1}^{N} A_i(x_0)\, dx_i$$

Esempio di campo

$$A = \begin{pmatrix} \sin xy \\ 1 + \operatorname{arctg} x^2 y \end{pmatrix}$$ campo su $\mathbb{R}^2$

Esempio di forma $\alpha(x, dx) = A_1(\underbrace{x_1 \ldots x_n}_{x})\, dx_1 + A_2(\underbrace{x_1 \ldots x_n}_{x})\, dx_2 + \ldots + A_n(\underbrace{x_1 \ldots x_n}_{x})\, dx_n$

$\alpha(x, y, dx, dy) =$

$= \sin xy\, dx + (1 + \operatorname{arctg} x^2 y)\, dy = \begin{pmatrix} \sin xy \\ 1 + \operatorname{arctg} x^2 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ w

A ed α sono ASSOCIATI

$\longrightarrow$ $\boxed{f : \nabla f = A}$ $\quad f \in C^1$ $\quad$ Accade se $\exists f \in C^1$: $f_{x_i}(x) = A_i(x) \ \forall x \in \Omega$

A è integrabile

$\longrightarrow$ $df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w = A(x_0) w = \alpha(x_0, w)$

$\boxed{\alpha = df \quad A = \nabla f}$

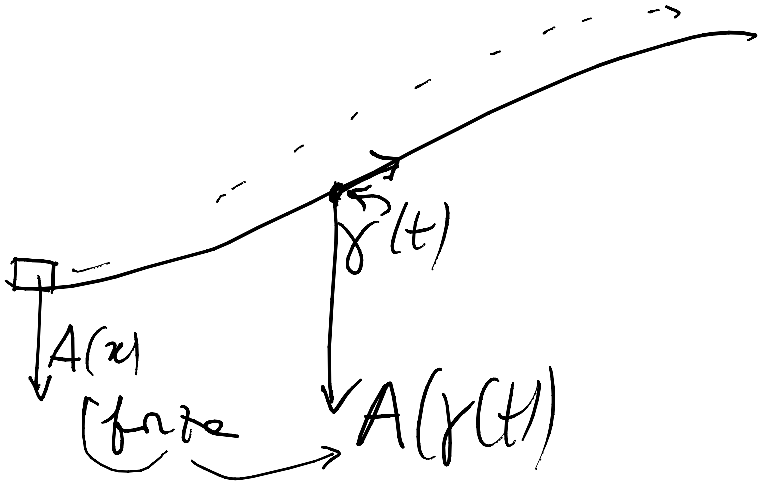
associato ad A

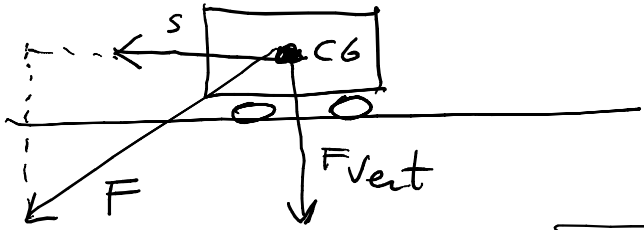
∇f è il campo associato al df

Campo associato alla forma $x\,dx + y\,dy = \alpha(\underbrace{x, y}_{\text{punto}}, \underbrace{dx, dy}_{w})$

è $A(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \qquad f'(x) = g(x) \qquad g \in C^0[a,b]$$





$$\boxed{L = F \cdot S}$$

prodotto scalare

$$\boxed{|F|\,|s|\cos\widehat{FS}}$$

Integrali del campo A sulla curva

REGOLARE

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\,\underbrace{\dot\gamma(t)\,dt}_{ds}$$

prodotto scalare fra i vettori $A(\gamma(t))$ e $\dot\gamma(t)$

Integrale di α sulla curva $\gamma \equiv$ l'integrale del suo campo associato.

$$\alpha(x,w) = A(x)w \qquad \int_\gamma \alpha \equiv \int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt$$

$$A = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

associati

$$\alpha = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma(t)$$

$$\dot\gamma = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$A(\gamma(t))\dot\gamma(t) =$$

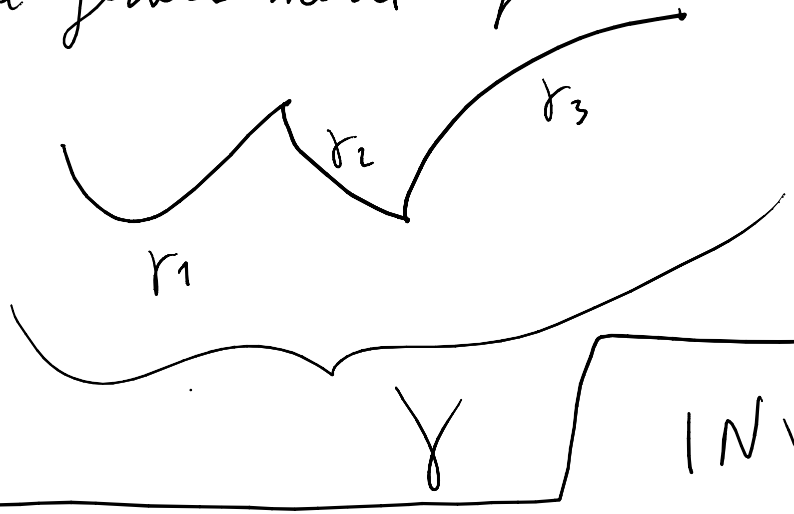
$$= -\underbrace{\frac{\sin t}{1}}_{A_1(\gamma(t))} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\dot\gamma_1(t)} + \underbrace{\frac{\cos t}{1}}_{A_2(\gamma(t))} \underbrace{\cos t}_{\dot\gamma_2(t)} =$$

$$= 1$$

$$\int_0^{2\pi} A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi$$

$$dx_1 = \dot\gamma_1(t)\,dt \qquad dx_2 = \dot\gamma_2(t)\,dt \;\dots\; dx_n = \dot\gamma_n(t)\,dt$$

se γ è generalmente regolare



$$\int_\gamma A = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A + \int_{\gamma_3} A$$

INVARIANZA DELL'INTEGRALE

$$\sigma(t) = \gamma(\rho(t)) \qquad \boxed{\dot\rho > 0} \qquad \sigma, \gamma \text{ regolari}$$

$\rho : [c,d] \to [a,b]$

$\rho(c) = a \qquad \rho(d) = b$

$$\int_\sigma A = \int_c^d A(\sigma(t)) \cdot \dot\sigma(t)\, dt =$$

$$= \int_c^d A(\gamma(\rho(t))) \cdot \dot\gamma(\rho(t)) \overbrace{\underbrace{\dot\rho(t)}_{\in\mathbb{R}}\, dt}^{ds} \underset{s=\rho(t)}{=} \int_{\rho(c)=a}^{\rho(d)=b} A(\gamma(s))\, \dot\gamma(s)\, ds = \int_\gamma A$$

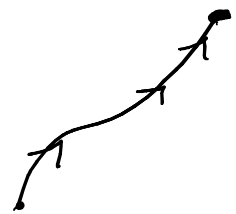
prodotto scalare

$\dot\rho < 0 \qquad \rho : [c,d] \to [b,a]$ $\qquad c<d \quad a<b$

$b = \rho(c), \quad a = \rho(d)$

$$\int_\sigma A = \int_b^a A(\gamma(s))\,\dot\gamma(s)\,ds = -\int_\gamma A$$

$\sigma(d)$



$\sigma(c)$

C.N. (e S.) perché $A \in C^0(\Omega)$ sia integrabile è che $\int_\gamma A$ dipende **SOLO** dagli estremi di γ e **NON** dal cammino

---

C.N. se A è integrabile e $A \in C^0 \Longrightarrow \int_\gamma A$ dipende solo dagli estremi e non dal cammino

$$\boxed{A : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad A \in C^k(\Omega) \iff A_i \in C^k(\Omega)}$$

A è integrabile $\Rightarrow \exists f : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; \nabla f \equiv A$ su Ω.

Poiché $A \in C^0 \Rightarrow \nabla f \in C^0 \Rightarrow f_{x_i} \in C^0 \Rightarrow \underline{f \in C^1(\Omega)}$

$$\underline{\gamma \in C^1[a,b] \to \Omega}$$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt \overset{A = \nabla f}{=} \int_a^b \underbrace{\nabla f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}_{\frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]}\,dt \underset{\substack{\text{Th. Torricelli} \\ \text{scalare} \\ (\text{in } \mathbb{R})}}{=}$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \underset{\text{Fisica}}{=} \boxed{\text{differenza di potenziale}}$$

estremi di γ