PUNTI CRITICI: CLASSIFICAZIONE

$\nabla f(x_0) = 0$ CN per un estremo

$f \in C^2(B_\rho(x_0))$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j}_{\in \mathbb{R}} + R_2(w)$$

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)$$

Se H NON HA AUTOVALORE NULLO (H NON DEGENERE)

H def. > 0 x_0 min (locale) H def < 0 x_0 max (locale)
H indefinita x_0 è una sella (locale)
} non degeneri

$x^2 + y^4$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$$

che si annulla solo in $(0,0)$ (unico punto critico)

in $(0,0)$ $\underbrace{x^2+y^4}$ ha minimo

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonale con autovalori 2 e $\underline{\underline{0}}$

DEGENERE

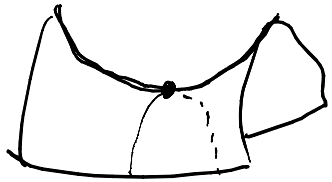
$\boxed{x^2 - y^4}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^3 \end{pmatrix}_{\substack{x=0\\y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sull'asse $y=0$
$(0,0)$ è di minimo

sull'asse $x=0$
$(0,0)$ è di massimo



$\boxed{x^2 + y^3}$

$$\frac{1}{2}\underset{}{\overset{f_{xx}(0)}{2}}\, w_1^2 = \\ = w_1^2$$

Spostandosi sull'autospazio dell'autovalore 0 (cioè l'asse y) il complesso dei termini di $\underline{\text{II}}$ grado è nullo

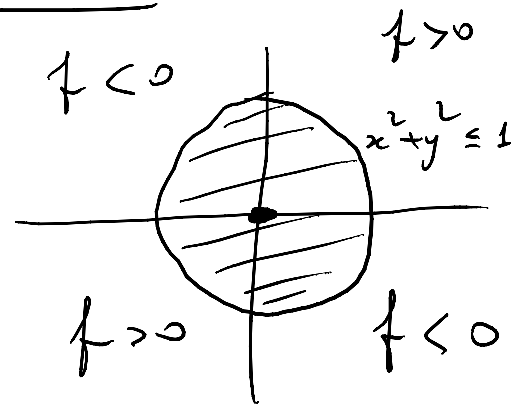
Equivale al caso $f'(x_0)=0$ dell'Analisi I

Strategie per la determin. degli estremi globali

$f(x) = x \quad [0,1]$ 0 è min 1 e max $\underline{f'(0) = f'(1) = 1}$

$f(x,y) = \underline{xy}$ $\quad$ $\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} f(x,y)$

$x^2+y^2 \le 1$



$f_x = y$

$f_y = x$

$$\boxed{\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)}$$

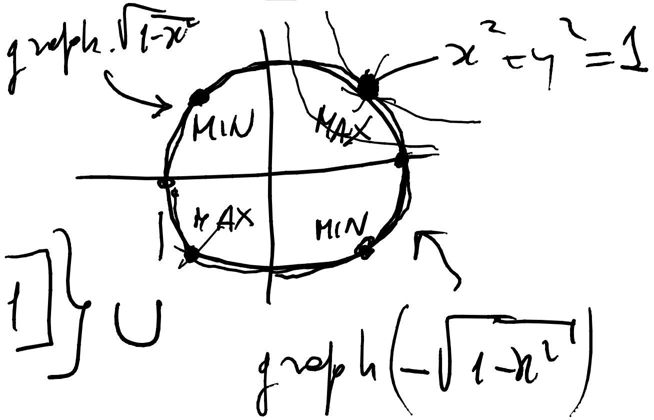
(0,0) sella non degenere

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = H(0,0) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

prodotto degli autovalori

H $\underline{\text{indefinita}}$

COME STUDIARE GLI ESTREMI SULLA FRONTIERA



$f(x,y)$ sulla circonf. unitaria $x^2+y^2=1$

1) "caso cartesiano" $\left\{\left(x, \overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{\varphi(x)}\right),\ x\in[-1,1]\right\} \cup$

$\cup \left\{\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right),\ x\in[-1,1]\right\}$

$h_1(x) = f\left(x, \overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{\varphi(x)}\right)$ su $[-1,1]$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{DINI} \\ f(x,\varphi(x))=0\end{array}}$$

1 variabile su un intervallo

$h_2(x) = f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$ su $[-1,1]$

Ogni punto della circonferenza $x^2+y^2=1$ sarà del tipo $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ oppure $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$ con $x\in[-1,1]$.

$h_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$ su $[-1,1]$

$$h_1'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

che ha lo stesso segno di $1-2x^2$ su $]-1,1[$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{array}$$

segno della h_1'

minimo locale in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

max locale in $1/\sqrt{2}$

$$h_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$h_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$h_1(1) = h(-1) = 0$ e dunque

punto di max globale in $\frac{1}{\sqrt{2}}$
valore max $\frac{1}{2}$

punto di min. globale in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
valore min $-\frac{1}{2}$

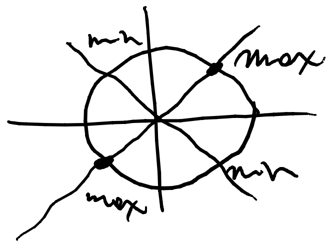
Lo stesso studio per $h_2(x) = f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$ dà

punto di massimo in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ di valore $\frac{1}{2}$

" " min in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ " " $-\frac{1}{2}$

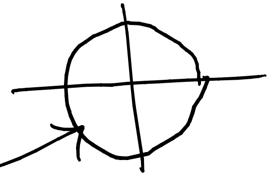
<u>Conclusioni</u> $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di massimo globale sulla frontiera

e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo globale sulla frontiera.



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [-\pi, \pi]$$



sostegno (immagine) di γ

$$\boxed{\text{Caso \underline{parametrico}}}$$

$$\boxed{h(t) = f(\gamma(t)) \quad t \in [-\pi, \pi]}$$

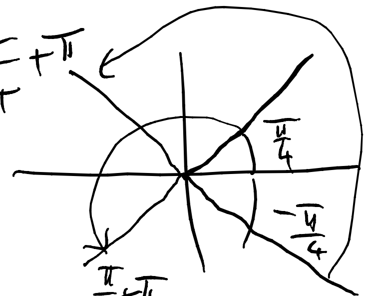
$$\boxed{h(t) = \cos t \sin t} = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\max_{\min} f = \max_{\min} h$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad [-\pi, \pi]$$

$h(t)$ ha max se $2t = \frac{\pi}{2}$

" min se $2t = -\frac{\pi}{2}$



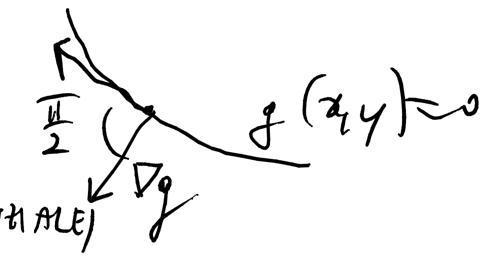
$$\sin 2t = 1$$

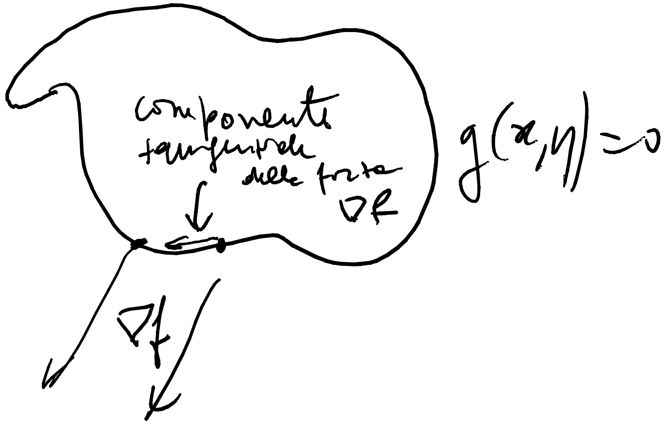
$$2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \qquad t = \frac{\pi}{4} + \pi$$

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

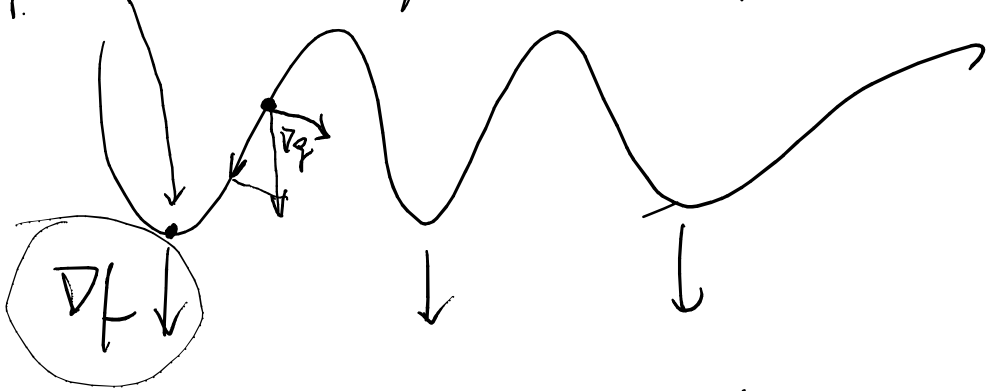
$\{ g(x,y)=0 \}$ = frontiera di Ω = dom f

$x^2+y^2-1=0$ $\qquad$ $\boxed{g(x,y)=x^2+y^2-1}$





Equilibrio se ∇f e ∇g sono paralleli (nessuna componente TANGENZIALE)



$\exists \lambda : \nabla f = \lambda \nabla g$ $\qquad$ λ moltiplicatore di Lagrange

I punti di max o min di $f(x,y)$ <u>vincolati</u> all'insieme

$\{g(x,y)=0\}$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \leftarrow \\ g = 0 \leftarrow \end{cases}$$

$$f(x,y) = xy \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} - 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\underline{\lambda x} \\ x = 2\underline{\lambda y} \\ x^2+y^2 = 1 \leftarrow \end{cases}$$

incognite x, y, λ

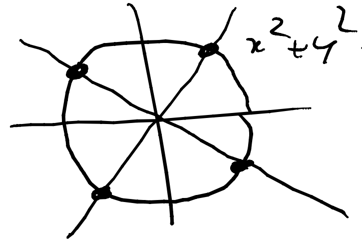
$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

dividendo la prima eq. per la seconda

si ottiene $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{y^2-x^2}{xy}$

ho zeri se $y = \pm x$



prime due eq.

$\lambda = 0 \Rightarrow x=0 \quad y=0$

$(0,0)$ unica soluzione prime due equazioni

ma NON della $\underline{III}$

$x=0$ I eq $\Rightarrow y=0$

$y=0$ $\underline{II}$ eq $\Rightarrow x=0$

$\max\limits_{\Pi} f$
$\min$

$$\Pi = \left\{ x : \begin{cases} g_1(x)=0 \\ \vdots \\ g_k(x)=0 \end{cases} \right\}$$

Gli estremi di f su $\Gamma = \{ g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0 \}$

sono fra le soluzioni di

moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f + \sum \lambda_i \nabla g_i = 0 & n \text{ equazioni} \\ \boxed{\begin{array}{l} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{array}} & k \text{ equazioni} \end{cases}$$

Estremi vincolati AN2.7