MASSIMI E MINIMI

Note Title 5/15/2020

UN PO' D'ANALISI 1

$f'(x_0)=0$ $\quad f''(x_0)>0$ $\quad x_0$ min. locale

$f''(x_0)<0$ $\quad x_0$ max locale

$f''(x_0)=0$ $\quad$ MARE DI GUAI!

$$f(x_0+w) = f(x_0)+f'(x_0)w+\frac{1}{2}f''(x_0)w^2+R_2(w)$$

$f'(x_0)=0$

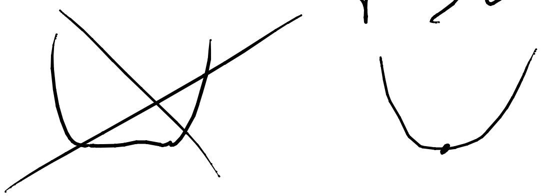
$$\underbrace{f(x_0+w)-f(x_0)}_{\substack{\geq 0 \text{ min. locali} \\ \leq 0 \text{ max locali}}} = \underbrace{w^2}_{\geq 0}\underbrace{\left[\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{R_2(w)}{w^2}\right]}$$

in un intorno

ha il segno di $f''(x_0)$

$\frac{R_2(w)}{w^2} \to 0$ per $w \to 0$

$f''>0$



Perm. segno

$[\quad]$ ha lo stesso segno del suo limite $\frac{1}{2}f''(x_0)$

$f \in C^2(\Omega)$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x_0 \in \mathring{\Omega}$ $\quad \underline{\nabla f(x_0) = 0}$ x_0 critico!

$$f(x_0+w) = f(x_0) + \cancel{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0) w_i}_{df(x_0,w)}}^{\nabla f(x_0)=0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + R_2(w)$$

$$f(\underbrace{x_0+w}_{x}) - f(x_0) = \underset{\geq 0}{|w|^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2}\right]$$

$\to 0$ $\quad w \to 0$ resto di Peano

Clairaut - Schwarz. $\quad f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ $\qquad \underline{\sum \underbrace{\overbrace{f_{x_i x_j}(x_0)}^{\in \mathbb{R}}} w_i w_j}$

forma quadratica simmetrica reale, che verifica

$$\boxed{\lambda |w|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} w_i w_j \leq \Lambda |w|^2}$$

con λ min autovalore $\quad \Lambda$ max autovalore

$$\lambda \le \frac{\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j}{|w|^2} \le \Lambda$$

ove λ, Λ sono il min e il massimo autovalore della matrice $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ Matrice Hessiana (HESSE)

$\lambda > 0 \iff$ hessiana è definita positiva.

$$\left[\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sum f_{x_i x_j}\cdots}{|w|^2}}_{\ge \frac{1}{2}\lambda > 0} + \underbrace{\frac{R_2(w)}{|w|^2}}_{\xrightarrow{w \to 0}\, 0}\right]$$

$$\left|\frac{R_2(w)}{|w|^2}\right| < \frac{1}{2}\lambda \quad (=\varepsilon)$$

per $|w|$ abbast. piccolo

$\Lambda < 0$ hessiana definita negativa

$$\left[\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\sum_{i,j} f_{x_i x_j}\cdots}{|w|^2}}_{\to \frac{\Lambda}{2}} + \underbrace{\frac{R_2(w)}{|w|^2}}_{\to 0}\right]$$

ha il segno di Λ

$\varepsilon = \left|\frac{\Lambda}{2}\right| \quad \exists \delta :$

$|w| < \delta$

$$\left|\frac{R_2(w)}{|w|^2}\right| < \varepsilon$$

Th.

Se $\nabla f(x_0) = 0$ $f \in C^2(\Omega)$ Ω aperto $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ è

definita positiva $\Rightarrow$ x_0 è un minimo locale

definita negativa $\Rightarrow$ x_0 è un massimo locale

$\boxed{/\!/\!/}$

Forme indef $\lambda < 0$ $\quad \Lambda > 0$

$$\lambda |w|^2 \le \sum a_{ij} w_i w_j \le \Lambda |w|^2$$

vale $=$ sugli autovettori di λ

uguaglianza sugli autovettori di Λ

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\sum_{ij} f_{x_i x_j} w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2}\right]$$

$$= \lambda/2$$

$\varepsilon = \left|\frac{\lambda}{2}\right|$

$[\quad] < 0$ per $|w|$ piccolo

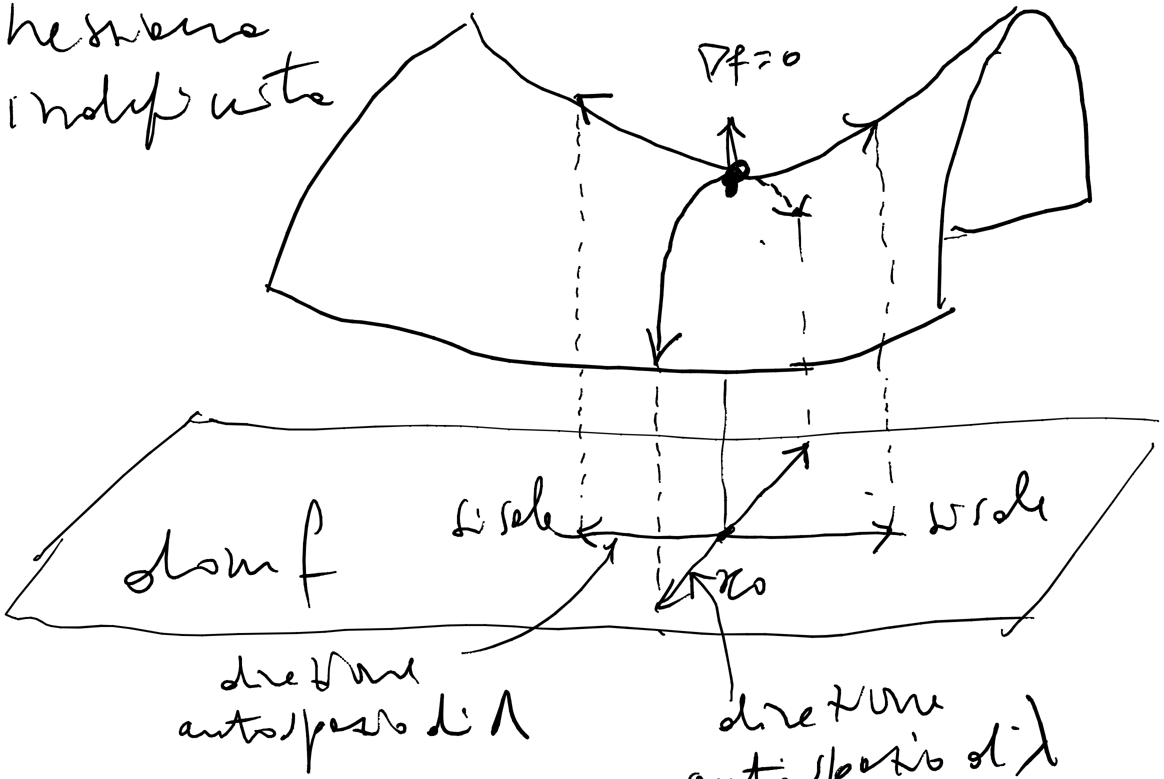
Se si sceglie come w un autovettore di λ il primo rapporto vale $\lambda < 0$

$\Rightarrow [\quad] < 0$.

Se si sceglie come w un autovettore di Λ il primo rapporto vale $\Lambda > 0$ e $[\quad] > 0$.

PUNTO DI SELLA (NON DEGENERE)

hessiano indefinito



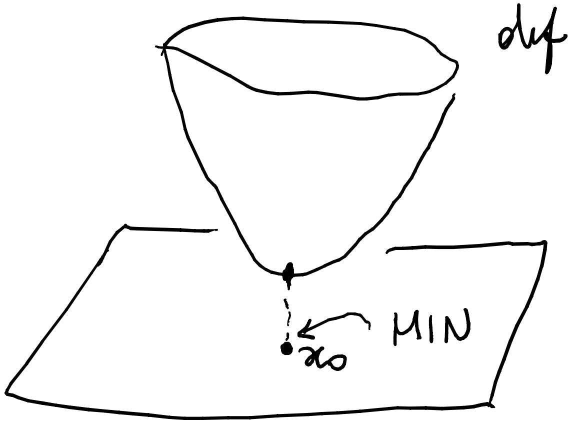
hessiano indefinito

$$f(x,y) = xy$$
$$= x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 - y^4 \\ f(x,y) = x^2 + y^4 \end{cases}$$

hessiano semidefinito ≥ 0

def. >0



def. <0