Note Title 5/7/2020

$\underbrace{u_1 \dots u_n}_{\text{base "vecchia"}} \longrightarrow \underbrace{u'_1 \dots u'_n}_{\text{base "nuova"}}$ due basi di uno stesso spazio X

$$u'_j = M_{ij} u_i \overset{\text{Einstein}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} u_i$$

$\boxed{M \text{ matrice di cambio base}}$

u'_j vettore j-esimo della base nuova M_{ij} è la coordinata di u'_j rispetto a $\underline{\underline{u_i}}$

$$u'_1 = \sum \alpha_i u_i$$

$\uparrow M_{i1}$

$$\{e^t, e^{-t}\} \to \{\sinh t, \cosh t\}$$

$$\begin{cases} \sinh t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ \cosh t = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\alpha_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{\alpha_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{\alpha_3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}}$$

La soluzione con Gauss-Jordan di questo sistema (quello che si trova a $\underline{\text{II}}$ membro) è la matrice di cambio base

---

$x \in H$ euclideo reale o complesso (c'è un prodotto scalare)

$e_1, e_2, \dots e_n$ sistema ortogonale, cioè $\boxed{e_i e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ >0 & i = j \end{cases}}$ $\longleftarrow$

$\longrightarrow$ $x = \sum_{i=1}^{n} x_{e_i} = \sum_{1}^{n} \frac{x e_i}{|e_i|^2} e_i$ Eulero-Fourier

Proiezione su una base ortogonale

se $|e_i| = 1 \quad \forall i \qquad (e_i e_i = 1)$

$$\boxed{x = \sum_1^n (x e_i) e_i}$$ caso ortonormale

$$\sum_1^n \frac{x e_i}{|e_i|^2} e_i \qquad \frac{x e_i}{|e_i|} \frac{e_i}{|e_i|}$$

versore

$$|e_i'| = 1 \quad \forall i$$

$$'' \to x\left(\frac{e_i}{|e_i|}\right) \frac{e_i}{|e_i|} \qquad e_i' = \frac{e_i}{|e_i|}$$

$A : \underline{X} \to Y \quad 0 < \dim X < \infty \quad e_1 \dots e_n$ base di X qualunque

$$A(X) = \langle \underbrace{A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)}_{\text{generatori di } \mathrm{Im}\, A} \rangle$$

non è detto siano indip. $\boxed{A(x) \equiv 0 \ \forall x}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{dipendenti}}$$

$$\boxed{A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = Au}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{I colonna}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{II colonna}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{III colonna}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & \text{III} - \text{I} \\ \hline 0 & -1 & -1 & \text{III} + \text{II} \\ \hline \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \end{array}$$

base di $A(\mathbb{R}^3)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

AL_1.1

II parte

Matrice ASSOCIATA

Teoria AL_6.4 esempi AL_6?

PIVOT

X Spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) vuol dire

su X è definita $+$ $\quad x, y \in X \longrightarrow \underline{x+y}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ $\quad x \in X \longrightarrow \lambda x$

in modo che valgano gli assiomi 8)

Spazio Euclideo $=$ Spazio vettoriale $+$ prodotto scalare

$\boxed{\text{AL.2.2 ?}}$

Th. completamento $\quad$ AL_(3.1) $\quad X = \mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$u_1 \dots u_n$ DIPENDENTI se

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_n$ NON TUTTI NULLI tali che $\sum \lambda_i u_i = 0$

$\Longleftrightarrow$

uno di essi è combinazione degli altri

$\underline{\lambda_1 \neq 0}$ $\quad \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} u_1 = -\sum_{2}^{n} \lambda_i u_i$

$$\boxed{u_1 = \sum_{2}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} u_i}$$

u_1 è combin. di $u_2 \dots u_n$

$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

base $\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$

x (I colonna) $+ y$ (II col) $+ z$ (III

$$A(u_1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A(u_2) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A(u_3) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Ax = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots x_nA_n}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Gauss Jordan

si trova la matrice associata

AL_6.2

Teor. AL-6.4

$A(u) = u''' - 3u''$ $\qquad \{ \underset{u_1}{e^t}, \underset{u_2}{e^{-t}} \} \qquad \{ \underset{v_1}{\sinh t}, \underset{v_2}{\cosh t} \}$

$A(u_1) = e^t - 3e^t = -2e^t$

$A(u_2) = -e^{-t} - 3e^{-t} = -4e^{-t}$

la I colonna della matrice di A è formata dalle coordinate di $-2e^t$ rispetto a $\{\sinh t, \cosh t\}$

$e^t = \sinh t + \cosh t \Rightarrow$

Matrice Assoc.

$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

$$A(\underline{u_1}) = -2e^t = \underline{-2} \overset{v_1}{\sinh t} \underline{-2} \overset{v_2}{\cosh t}$$

$$A(\underline{u_2}) = -4e^{-t} = \underline{+4} \sinh t \underline{-4} \cosh t$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$e^{-t} = \cosh t - \sinh t$

$A : X \to Y \qquad \dim X > \dim Y$

$\Rightarrow$ Grassmann. $\Leftarrow$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} A}_{>0} + \overbrace{\dim A(X)}^{<} = \dim X$$

$$\dim A(X) \leq \dim Y$$

$n > 0 \Leftrightarrow n \geq 1$

$A(X) \subseteq Y$

A è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

A è biettiva $\Rightarrow A$ è iniettiva