Note Title 4/28/2020

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

1) $f \in C^1(\Omega)$

2) $f(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0$

3) $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ è interno ad Ω ($\in \mathring{\Omega}$)

4) $\det \dfrac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0) \neq 0$

$f(x,y) = 0$

$f_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\exists B(x_0, \delta) \quad \varphi : B(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$

$f(x, \varphi(x)) = 0$

$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, f(x))}$

$\exists \delta > 0 \quad \varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m) \quad \varphi : B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

(2) $\varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0) = y_i^0$

(1)
$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n, \varphi_1(x_1 \dots x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots x_n)) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n, \underbrace{\varphi_1(x_1 \dots x_n)}_{y_1}, \dots, \underbrace{\varphi_m(x_1, \dots x_n)}_{y_m}) = 0 \end{cases}$$

$(y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n))$

$$\frac{\partial(\varphi_1 \cdots \varphi_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = -\left[\frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(y_1 \cdots y_m)}\right]^{-1}\left[\frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}\right]$$

(esiste per l'Hp 4)

$y_1 \cdots y_m$ "PIVOT"

$x_1 \cdots x_n$ "NON PIVOT" (parametri)

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1 \cdots \varphi_m)}{\partial(x_1, \cdots x_n)}\right]_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$$

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$u = f(x,y)$

$v = g(x,y)$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$y = F(x)$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

Si può risolvere l'equazione rispetto ad x?

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1 \ldots x_n) \\ \vdots \\ y_n = F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$\exists\, F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ : \ x = F^{-1}(y)$ $\qquad F(F^{-1}(y)) = y$

$F(x) - y = 0$ $\qquad G(x,y) = F(x) - y$ $\qquad G(x,y) = 0$

Si applica a G il th. delle funzioni implicite. $\qquad G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$: $G(x_0, y_0) = 0 \iff F(x_0) = y_0$ $\qquad (x_0, y_0)$ interno a $\operatorname{dom} F \times \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\det \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0} \qquad \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{ij} = \left[\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right]_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial G_i(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial x_j}}_{=0} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

$\hookrightarrow = 0$ perché y_i non dipende esplicit. da $x_1 \dots x_n$

4) $$\det \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta > 0 \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : B_\delta(y_1^0 \dots y_n^0) \to \mathbb{R}^n$$

a) $\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) = \left(\varphi_1(y_0), \dots, \varphi_n(y_0)\right)$

b) $G\left(\varphi_1(y), \dots \varphi_n(y), y_1 \dots y_n\right) = 0$ $\quad \boxed{F\left(\varphi_1(y) \dots \varphi_n(y)\right) - y = 0}$

c) $$\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} = -\left[\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right]^{-1} \frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)}$$

$$\left[\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right] = \left[\frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right]$$

$$\boxed{x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n) \quad i = 1 \dots n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x = \varphi(y)}$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{F(\varphi(y)) = y \iff \varphi = F^{-1}}$$

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ $\quad f$ differ. $\quad \boxed{z=f(x,y)}$

graph f $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} : z=f(x,y)\right\}$

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

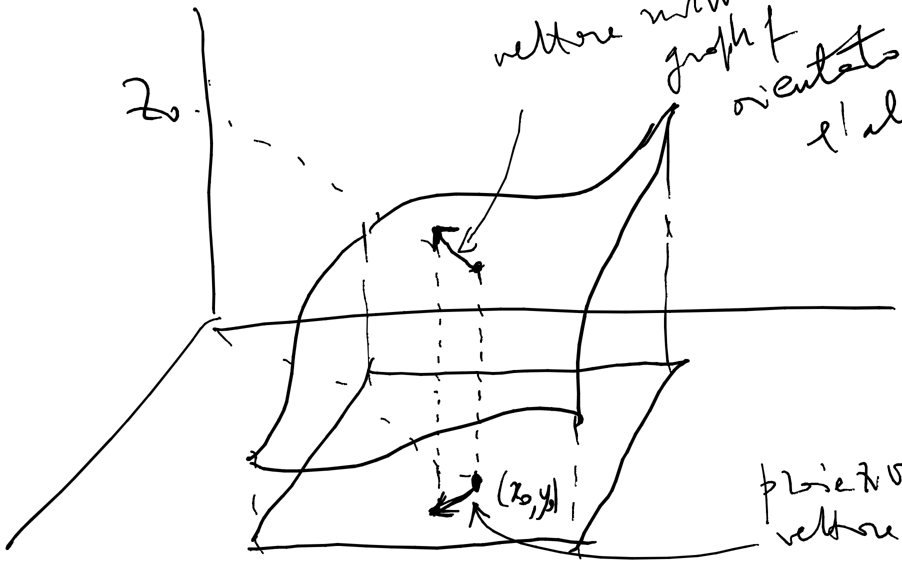
piano tangente in $(x_0,y_0,z_0)=$
$=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

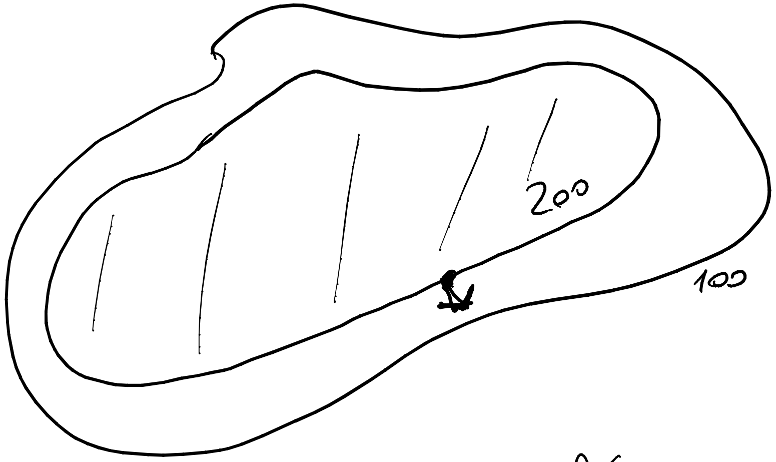
$$\boxed{-f_x(x_0,y_0)x-f_y(x_0,y_0)y+z= \\ =\underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0}-f_x(x_0,y_0)x_0-f_y(x_0,y_0)y_0}$$

$$\nu=\begin{pmatrix}-f_x(x_0,y_0)\\ -f_y(x_0,y_0)\\ 1\end{pmatrix}$$

VETTORE NORMALE orientato verso l'alto (III componente >0)

vettore normale a graph f orientato verso l'alto



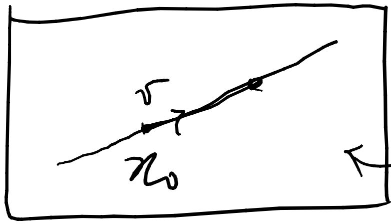


proiezione del vettore normale orientato verso l'alto $= -\nabla f(x_0, y_0)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \underline{\nabla f(x_0)\, v}}$$

sotto l'ipotesi che f sia differenziabile

$$\| \quad \underline{\underline{df(x_0, v)}}$$



dom f

$$\left|\nabla f(x_0) v\right| \underset{\uparrow}{\leq} |\nabla f(x_0)|\,|v|$$

Schwartz

e l'uguaglianza vale se

$$v = \lambda \nabla f(x_0)$$

ne segue che la direzione v in cui la pendenza $\partial_v f$ ha modulo massimo se v è un multiplo di $\nabla f(x_0)$.

Si osservi però che

- se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\boxed{\lambda > 0}$ si ha $\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)\left(\lambda \nabla f(x_0)\right) = \lambda |\nabla f(x_0)|^2 \geq 0$

- se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda < 0$ si ha $\partial_v f(x_0) = \lambda |\nabla f(x_0)|^2 \leq 0$

Dunque, se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda > 0$ f CRESCE ($\partial_v f \geq 0$), mentre se

se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda < 0$ f DECRESCE

La direzione di $\nabla f(x_0)$ e dei suoi multipli positivi (vettori equiversi) è la DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA ASCENDENTE.

L'opposta è detta DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA DISCENDENTE.