Note Title 4/24/2020

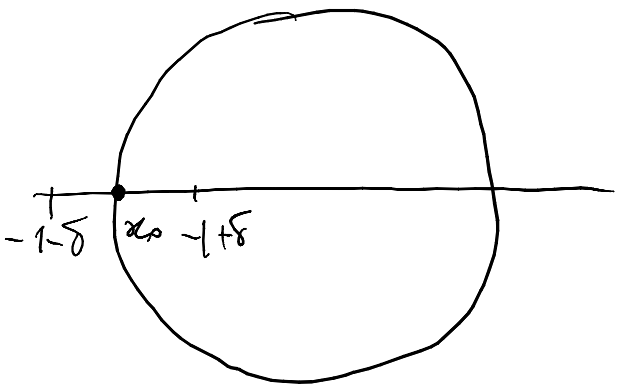
$f(x,y) = x^2+y^2-1$ $\quad f_x(x,y) = 2x \quad f_x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_y(x,y) = 2y \quad f_y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

I punti in cui non si può applicare il teorema del Dini ($f_y \neq 0$) sono tutti i punti della circonferenza, tranne $(-1,0)$ e $(1,0)$ nei quali $f_y = 0$.

I punti in cui il th. Dini è inapplicabile per esplicitare la x come funzione della y sono tutti i punti della circonferenza, tranne $(0,1)$ e $(0,-1)$, nei quali $f_x = 0$.

In effetti, non solo non si può applicare il th. del DINI in tali punti (che è una condizione sufficiente, ma non necessaria) ma è falsa la tesi!



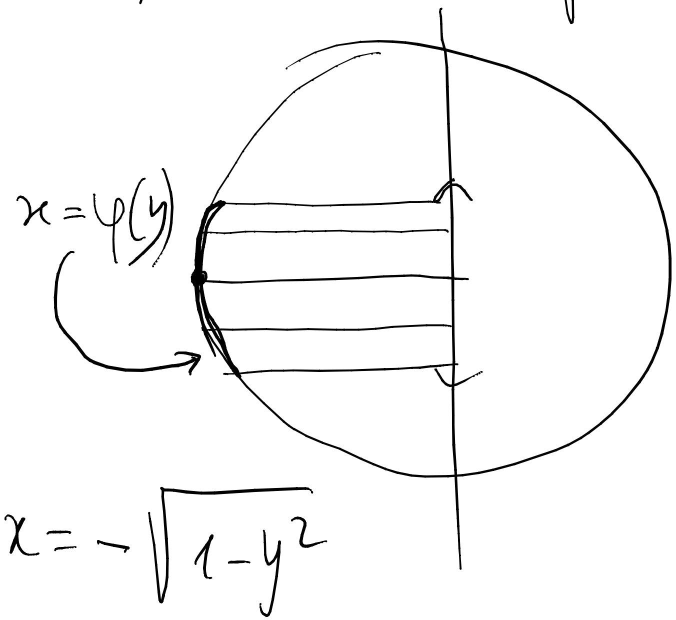
Scegliendo $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, non è possibile scegliere δ in modo che, su $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ si possa definire φ in modo tale che il suo grafico coincida coll'insieme degli zeri in un intorno abbastanza piccolo:

se $\bar{x} \in [-1-\delta, -1[$ non esistono zeri di $f(\bar{x}, y)$

se $\bar{x} \in]-1, -1+\delta]$ zeri ce ne sono <u>due</u>

e nessun grafico di funzione può avere due punti su una retta verticale.

Però, non ci sono problemi cambiando la variabile indipendente (non-pivot)



Ciò accade perché in $(-1,0)$ f_x non si annulla e quindi si può esplicitare la x in funzione di y.

I punti davvero "critici" per il teorema del DINI sono quelli in cui entrambe le derivate si annullano e il teorema è inapplicabile!

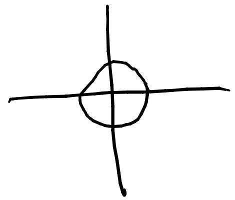
ESEMPIO:

$f(x,y) = xy \qquad f_x = y \quad f_y = x \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

e dunque, pur avendosi $f(0,0)=0$ non ci si può attendere che l'insieme di livello 0, in vicinanza di $(0,0)$ sia il grafico di una funzione, qualunque variabile si scelga come indipendente. In effetti

$f(x,y)=0 \Longleftrightarrow xy=0$ e dunque l'insieme di livello

$f(x,y)=0$ è formato dai due assi cartesiani.



Non importa quanto piccolo si sceglie l'intorno, in nessun caso la porzione dell'insieme di livello che cade nell'intorno è un grafico di funzione