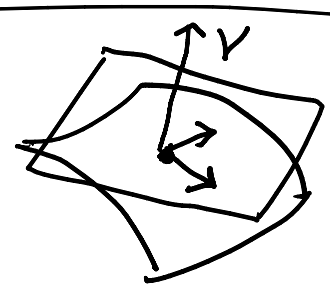
Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\phi(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad u \in [0,\pi] \quad v \in [0,2\pi]$$



$$\psi(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

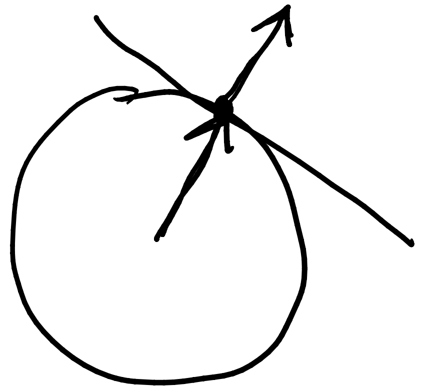
$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$$ si può usare il prodotto vettore.

$$v = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (1, -0, 0)$$ direzione normale al piano tangente

Equaz. implicita $1(x-1) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\phi_u = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \qquad \phi_v = \begin{pmatrix} \sin u(-\sin v) \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$N = \underbrace{\phi_u \times \phi_v} = \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ \underbrace{\sin u \cos u \cos^2 v + \sin u \cos u \sin^2 v}_{\sin u \cos u} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sin^2 u \cos v, \ \sin^2 u \sin v, \ \sin u \cos v \right) = \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

Wednesday, April 22, 2020 3:26 PM

I problema del th. DINI

$\vdots$

4) $y \to f(x,y)$ è strett. crescente $\forall (x,y) \in \Omega$

difficile da verificare

$x < y \Rightarrow \underbrace{\varphi(x) < \varphi(y)}_{\text{risolvere e verificare che}}$

sono soluzioni

1) 2) 3) $f(x_0,y_0)=0$, (x_0,y_0) interno, f continua in Ω

4) $f_y(x_0,y_0) > 0$ $\quad f \in C^1(\Omega)$

$y = \varphi(x)$

TS. $\exists \delta, \varphi$: $\quad y_0 = \varphi(x_0)$

$f(x, \varphi(x)) = 0$

φ è derivabile

$$\boxed{\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}}$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^2$

1) $f\in C^1(\Omega)$ $\quad$ 3) $(x_0,y_0)\in\mathring{\Omega}$

2) $f(x_0,y_0)=0$ $\quad$ 4) $f_y(x_0,y_0)>0$

1) $\exists\,\delta>0$ $\varphi:[x_0-\delta,x_0+\delta]$:

2) $\boxed{\varphi(x_0)=y_0}$

3) $f(x,\varphi(x))=0\ \forall x$

4) φ è derivabile

e in più

$$\boxed{\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}}$$

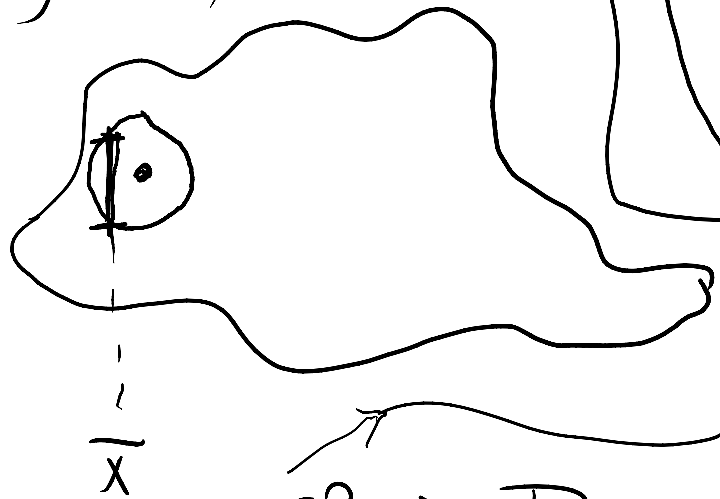
eq. diff. del I ordine nell'incognita φ

DIM

Th. perm. segno $\exists\,\sigma>0:\ f_y(x,y)>0$

$\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\sigma)=B$

$y\to f(\bar{x},y)$ è strett. crescente per il Th. Lagrange



f verifica tutte le ipotesi del Th. DINI $\underline{\underline{C^0}}$ in B.

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

Da dove viene l'idea della formula per $\varphi'(x)$?

In effetti, se φ fosse derivabile si ha, da un conto che

$x \to f(x, \varphi(x)) \equiv 0$, ma inoltre $x \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ ha derivata $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$

da cui

$$0 \equiv \frac{d}{dx}\left[f(x, \varphi(x))\right] = f_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \underbrace{f_y(x, \varphi(x))}_{\neq 0} \varphi'(x)$$

$\overset{|||}{0}$ perché $f(x, \varphi(x))$ è costante

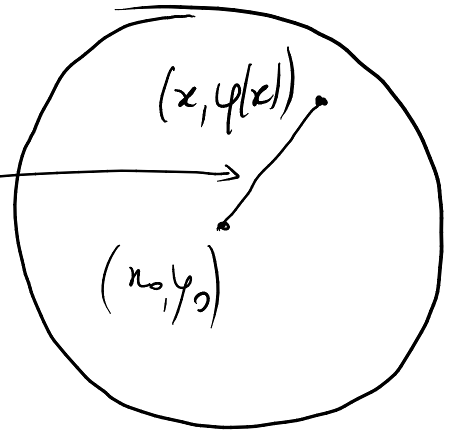
$\Downarrow$ risolvendo rispetto a $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

x fissato

B è una sfera, e il segmento è tutto contenuto in essa.



$$h(t) = f\big(x_0 + t(x - x_0),\ \varphi(x_0) + t(\varphi(x) - \varphi(x_0))\big) = f(g(t)) \text{ ove}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t(x - x_0) \\ \varphi(x_0) + t[\varphi(x) - \varphi(x_0)] \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) \end{pmatrix}$$

da cui

$$h'(t) = [f(g(t))]' = f'(g(t))\, g'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(x, \varphi(x)) \\ f_y(x, \varphi(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) \end{pmatrix}$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$0 = \underbrace{f(x,\varphi(x))}_{=0 \text{ in } [x_0-\delta,x_0+\delta]} - \underbrace{f(x_0,\varphi(x_0))}_{=0} \underset{\text{def. di } h}{=} h(1)-h(0) \underset{\text{Lagrange},\ \xi\in[0,1]}{=} (1-0)h'(\xi) =$$

$$= f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)(x-x_0)+$$

$$+ f_y\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\frac{f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}{f_y(\quad \text{idem} \quad)}$$

Per calcolare il limite a secondo membro e provare così la derivabilità di φ osserviamo che

1) Se $x \to x_0$ anche $x_0+\xi(x-x_0) \to x_0$ perché è compreso fra x e x_0

2) Se $x \to x_0$ $\varphi(x) \to \varphi(x_0)$ per il teorema già provato per f continua

3) Se $x \to x_0$ $\varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0)) \to \varphi(x_0)$ perché è compreso fra $\varphi(x_0)$ e $\varphi(x)$

4) Essendo $f \in C^1(\Omega)$, f_x ed f_y sono continue su $B \subseteq \Omega$ e, dunque, il rapporto a secondo membro tende al suo valore in $x=x_0$, cioè $-\dfrac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))}$

Wednesday, April 22, 2020 2:55 PM

Si osserva, sostituendo a x_0 qualunque punto $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, che la derivabilità di φ è provata, in realtà, in tutti i punti di $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.
Inoltre, la formula appena dimostrata garantisce che $\varphi'(x)$ è continua, in quanto rapporto di funzioni continue, con denominatore mai nullo. Dunque

$$f \in C^1(\Omega) \implies \varphi \in C^1[x_0-\delta, x_0+\delta]$$

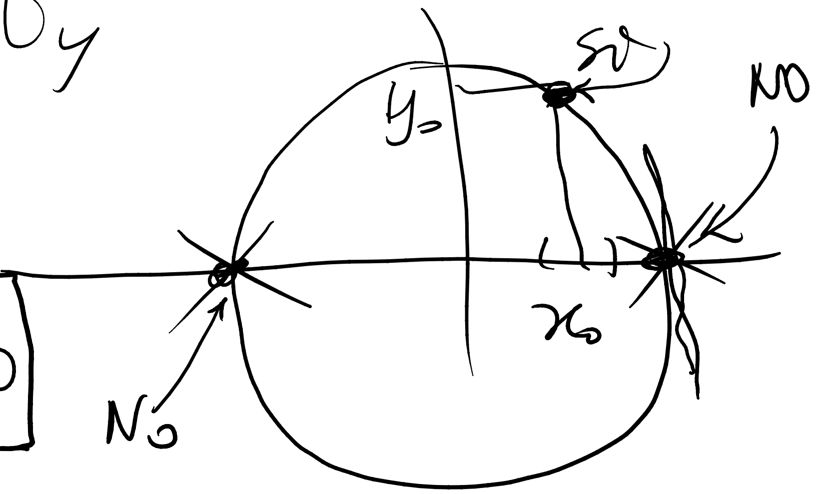
Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

IN PRATICA

$$x^2+y^2-1=0$$

$f_y \neq 0$ $\qquad f_y(x,y) = 2y$ $\qquad f_y = 0$ sull'asse x

$$y = \sqrt{1-x^2} = \varphi(x)$$



$$\boxed{y_0 \neq 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_y(x_0,y_0) \neq 0$$

SE $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

NON SI PUÒ APPLICARE DINI!!