Thursday, April 16, 2020 2:41 PM

TEOREMA DI BINET

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

DIM. $\det A \neq 0$ $\quad (B_1, B_2, \dots, B_n) \rightarrow \frac{1}{\det A} \det(\underbrace{AB_1, \dots, AB_n})$

Il determinante di B è l'unica funzione delle colonne di B tali che $\quad \overset{?}{=} \det B$ sì

1) se $B = I = (e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \det B = 1$

2) se $C = (B_2, B_1, B_3, \dots, B_n) \Rightarrow \det C = -\det B$
(Alternanza)

3) Multilinearità

$$\det(B_1 + C, B_2, \dots, B_n) = \det(B_1, \dots B_n) + \det(C, B_2, \dots, B_n)$$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

$$\det(\lambda B_1, B_2, \dots, B_n) = \lambda \det(B_1, \dots, B_n)$$

proprietà caratteristiche e qualunque funzione che gode di tali proprietà è il det B.

$$\varphi(B_1, \dots, B_n) = \frac{1}{\det A} \underbrace{\det(AB_1, AB_2, \dots, A(B_n))}_{\det AB}$$

1) $\varphi(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{I}) = \frac{1}{\det A} \det(A_1, A_2, \dots, A_n) = 1$

A_1: prima colonna di A

A_n: n-esima colonna di A

2) Scambiando due argomenti di φ, il II membro cambia segno.

$$\varphi(B_1+C, B_2, \ldots, B_n) = \frac{1}{\det A} \det\Big(\underbrace{A(B_1+C)}_{AB_1 + AC}, AB_2, \ldots, AB_n\Big) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \Big(\det(AB_1, \ldots, AB_n) + \det(AC, AB_2, \ldots, AB_n)\Big)$$

$$= \varphi(B_1, B_2, \ldots, B_n) + \varphi(C, B_2, \ldots, B_n)$$

$$\varphi(\lambda B_1, B_2, \ldots, B_n) = \frac{1}{\det A} \det\Big(\underbrace{A(\lambda B_1)}_{\lambda AB_1}, AB_2, \ldots, AB_n\Big) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \lambda \det(AB_1, \ldots, AB_n) = \lambda \varphi(B_1, \ldots, B_n)$$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

$$\Rightarrow \varphi(B_1, \dots, B_n) = \det(\underbrace{B_1, \dots, B_n}_{B}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\det A} \det(AB) = \det B \quad (\text{BINET}, \text{ se } \underline{\underline{\det A \neq 0}})$$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

<u>Th</u> spazi invarianti $\quad$ X spazio complesso, $\dim X$ finita e ≥ 1

$\mathcal{A}: X \to X$, lineare <u>allora</u> esistono

$\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in X$: $\boxed{\mathcal{A}(u) = \lambda u,\ u \neq 0}$

u è autovettore di $\mathcal{A}$.

---

1) X è di dim. $< \infty$ e non nulla, ha basi e se $e_1 \dots e_n$ una di esse, qualsiasi. $\forall x \in X\ \exists x_1 \dots x_n : x = \sum_1^n x_i e_i$ e osserv. che $x = 0 \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i = 1, .. n$.

2) $u = \sum_1^n u_i e_i \quad \mathcal{A}(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} u_j e_i$

matrice associata ad $\mathcal{A}$ e alla base $e_1 \dots e_n$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} u_j \right) e_i - \lambda \sum_{i=1}^n u_i e_i = 0 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n A_{ij} u_j - \lambda u_i \right] e_i \Leftrightarrow$$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} A_{ij} u_j - \lambda u_i = 0 \quad \forall i = 1..n}$$ sistema caratteristica

$A = (A_{ij})$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

sistema lineare omogeneo nelle incognite $u_1 \dots u_n$ quadrato, CHE HA SOLUZ. NON NULLE se e solo se il suo det $= 0$.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

polinomio in λ di grado $n \geq 1$

$\Rightarrow$ che ha zeri per il teorema fondamentale dell'Algebra, in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix}$ dove non tutti nulli

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

e $\bar{u} = \sum \bar{u}_i e_i$ è l'autovettore richiesto.

<u>NOTA</u>. L'autovalore λ <u>non</u> è detto sia <u>reale</u>.

AL_7.1

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

A è diagon. $\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{\lambda_i = \sigma(A)} \dim A^{\lambda}}_{= \dim \bigoplus A^{\lambda_i}} = \dim X = n$

$\Longrightarrow$ Sia $u_1 \dots u_n$ una base spettrale di X. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$

siano $u^1_1, \dots, u^1_{k_1}$ tutti gli autovettori della base relativi a λ_1

$\vdots$

$u^h_1, \dots, u^h_{k_h}$ " " " " " " " λ_h

Poiché $u^i_1 \dots u^i_{k_i}$ sono indip. (in una base!) per il th. max num. vettori indip. $\Rightarrow \dim A^{\lambda_i} \geq k_i \Rightarrow$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

$$\boxed{\sum_{1}^{h} \dim A^{\lambda_i} \geq \sum k_i = n}$$

$\bigoplus_{i=1}^{h} A^{\lambda_i}$ è un sottospazio di X e dunque

$$\boxed{\dim \bigoplus A^{\lambda_i} \leq \dim X = n}$$

$$\underline{n} \leq \dim \bigoplus_{1}^{h} A^{\lambda_i} = \underline{\sum_{1}^{h} \dim A^{\lambda_i}} \leq \underline{n}$$

Thursday, April 16, 2020 3:01 PM

$\Longleftarrow$ c.s. $\dim A^{\lambda_i} = \dim X = n$

$\underbrace{u_1^1 \dots u_{k_1}^1}$ (differenti dai precedenti, eventual.) base di A^{λ_1}

$\vdots$

$\underbrace{u_1^h \dots u_{k_h}^h}$ " " A^{λ_h}

Consideriamo $u_1^1 \dots u_{k_1}^1 \, u_1^2 \dots u_{k_2}^2 \dots u_1^h \dots u_{k_h}^h$

e proviamo che è una base di X.

$k_1 = \dim A^{\lambda_1} \; \dots \; k_h = \dim A^{\lambda_h} \Longrightarrow$

$\sum_1^h k_i = \sum_1^h \dim A^{\lambda_i} = n$ il numero dei vettori u_j^i è n.

Dalla somma diretta u_j^i sono indip. e dal th. generati formano una base di X.