RAPPRESENTAZIONE DEL DIFFERENZIALE PER $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

<u>Già visto</u> il caso $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad df(x_0, w) = \underbrace{\nabla f(x_0)}_{f'(x_0)} w$

Proviamo che $\forall n, m$

$$\boxed{df(x_0, w) = f'(x_0) w}$$

$f'(x_0)$? w ?

che tipo di prodotto.

$$\boxed{\text{Se } n > 1 \quad m = 1} \qquad f'(x_0) = \left(f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0) \right)$$

$A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad A(x) = ax \in \mathbb{R}^m \qquad A(x) = a\, x$? ?

$n=1 \quad m=1 \qquad a \in \mathbb{R}$ il prodotto è fra numeri

$n=1 \quad m>1 \qquad a \in \mathbb{R}^m$ il prodotto è scalare x vettore

$n>1 \quad m=1 \qquad a \in \mathbb{R}^n$ il prodotto è scalare

$n>1 \quad m>1 \qquad a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ il prodotto è Matrice x Vettore

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ALGEBRA}\\ \text{LINEARE}\end{array}}$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad df(x_0,w) = \underbrace{f'(x_0)\,w}_{=A(w)}$ $\quad$ $f'(x_0)$ la derivata in x_0

$$\lim_{w\to 0}\frac{1}{|w|}\left[f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)\right] \underset{w\neq 0}{=}$$

$$=\lim_{w\to 0}\underbrace{\frac{w}{|w|}}_{\text{limitata}}\Bigg[\underbrace{\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{w}}_{\text{rapporto incrementale}} - \underbrace{\frac{f'(x_0)\cancel{w}}{\cancel{w}}}_{\text{derivata}}\Bigg] = 0 \text{ se e solo se}$$

f è derivabile in x_0

$\boxed{n=1 \quad m=1}$ $\quad \boxed{df(x_0,w) = f'(x_0)\,w}$ $\quad$ $f'(x_0)\in\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{R}$ $\quad$ il prodotto è prodotto di numeri.

$$\boxed{df = f'(x)\,dx}$$

$\boxed{n=1 \quad m>1}$ $\quad$ curve $\quad f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^m$ $\quad \underbrace{df(x_0,w)}_{\in \text{ codominio di } f=\mathbb{R}^m} = \underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^m}\,w \in\mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0)\right) \qquad f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right)$$

$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w\right] = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$\mathbb{R}^m$

Se e solo se

$$\lim_{w\to 0}\left(\frac{f_1(x_0+w)-f_1(x_0)-f_1'(x_0)w}{|w|}, \dots, \frac{f_m(x_0+w)-f_m(x_0)-f_m'(x_0)w}{|w|}\right)$$

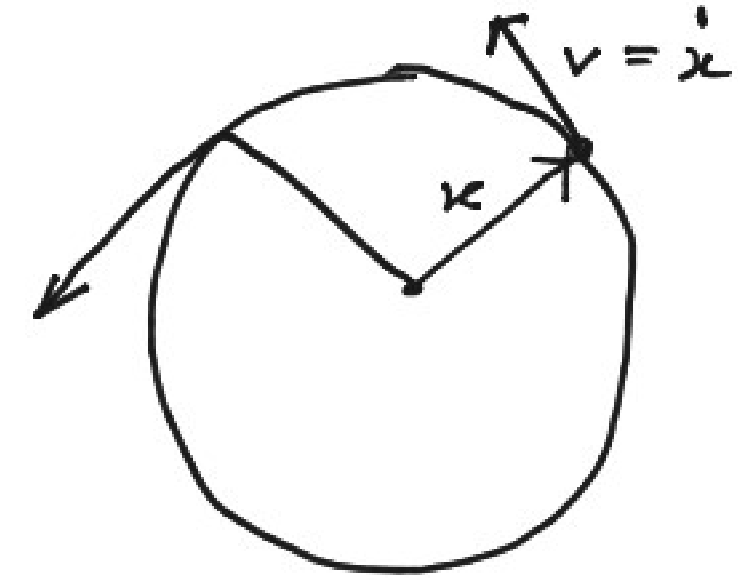
$\to 0$ $\quad$ 0

se e solo se esistono tutte le derivate $f_i'(x_0)$ (cioè se $f_i(x)$ è derivabile in x_0)

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0)\right)$$

derivata
velocità "SINONIMI"

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$



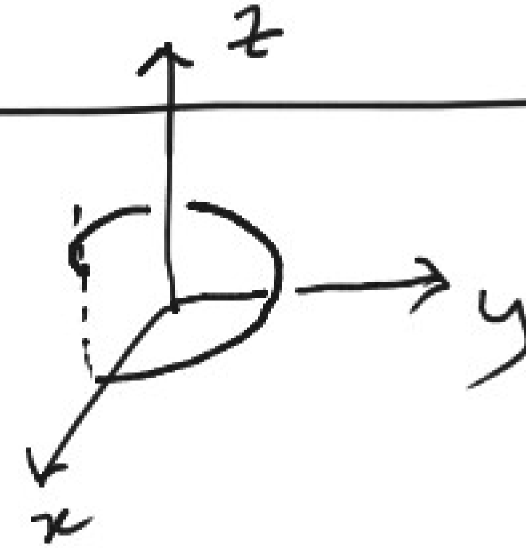
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} (\cos t)^{\cdot} \\ (\sin t)^{\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

1) Si osserva che $\dot{x} \cdot x = 0$, cioè la velocità è ortogonale al raggio nel punto.

$$\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t \equiv 0$$

2) $|\dot{x}| = 1$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

velocità

$\underline{n>1}$ $\quad$ $\underline{m>1}$ $\quad$ $i=1..m \quad j=1..n$

$$\underbrace{df(x_0,w)}_{\in \mathbb{R}^m \text{ (codominio di } f)} = \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} \; w \in \mathbb{R}^n$$

$$\longrightarrow \quad f'(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

$\longrightarrow$ Matrice Jacobiana

oppure derivata

oppure matrice derivata

$$\boxed{\lim_{w\to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w\right] \overset{?}{=} 0}$$

$$= \left(\lim_{w\to 0} \frac{f_1(x_0+w) - f_1(x_0) - \nabla f_1(x_0)w}{|w|}, \; \dots, \; \lim_{w\to 0} \frac{f_m(x_0+w) - f_m(x_0) - \overbrace{\nabla f_m(x_0)w}^{df_m(x_0,w)}}{|w|}\right)$$

$\to 0$ se f_1 è differenziabile

$df_1(x_0,w)$

0 se f_m è differenziabile

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \partial_{x_2} f_m & & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Differenziabilità di funzioni composte

$$f : \Omega \to \Sigma \qquad g : \Sigma \to \mathbb{H}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$

m, n, p arbitrari

$$h : \Omega \to \mathbb{H} \qquad h(x) = g(f(x))$$

(SENZA DIMOSTRAZIONE)

$$\boxed{dh(x_0, w) = dg(f(x_0), df(x_0, w))}$$

fissato x_0

$w \to df(x_0, w)$

differenziali

Il differenziale di una funzione composta è la composizione dei differenziali

$m, n, p > 1$

$$\boxed{\underbrace{h'(x_0)}_{\mathbb{R}^{p \times m}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{p \times n}} \underbrace{f'(x_0)}_{\mathbb{R}^{n \times m}}} \to \text{derivate}$$

$$t \xrightarrow[f]{} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \xrightarrow[g]{} \cos t \sin t = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sin 2t}} \qquad g(x,y) = xy$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad g'(x,y) = (y, x)$$

$$\boxed{g'(f(t))\, f'(t)} = \underbrace{(\sin t, \cos t)}_{g'(f(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{f'(t)} = -\sin^2 t + \cos^2 t = \underline{\underline{\cos 2t}}$$

$y = \sin t$

$x = \cos t$

$$g(x,y,z) = \sin xy \cos z \qquad g(f(t)) = \sin(t^2 \operatorname{arctg} t) \cos(2+t)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \operatorname{arctg} t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

Rette e piani tangenti

$n=1 \quad m=1 \quad f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) - \left[f(x_0) + \alpha(x-x_0)\right]}$$

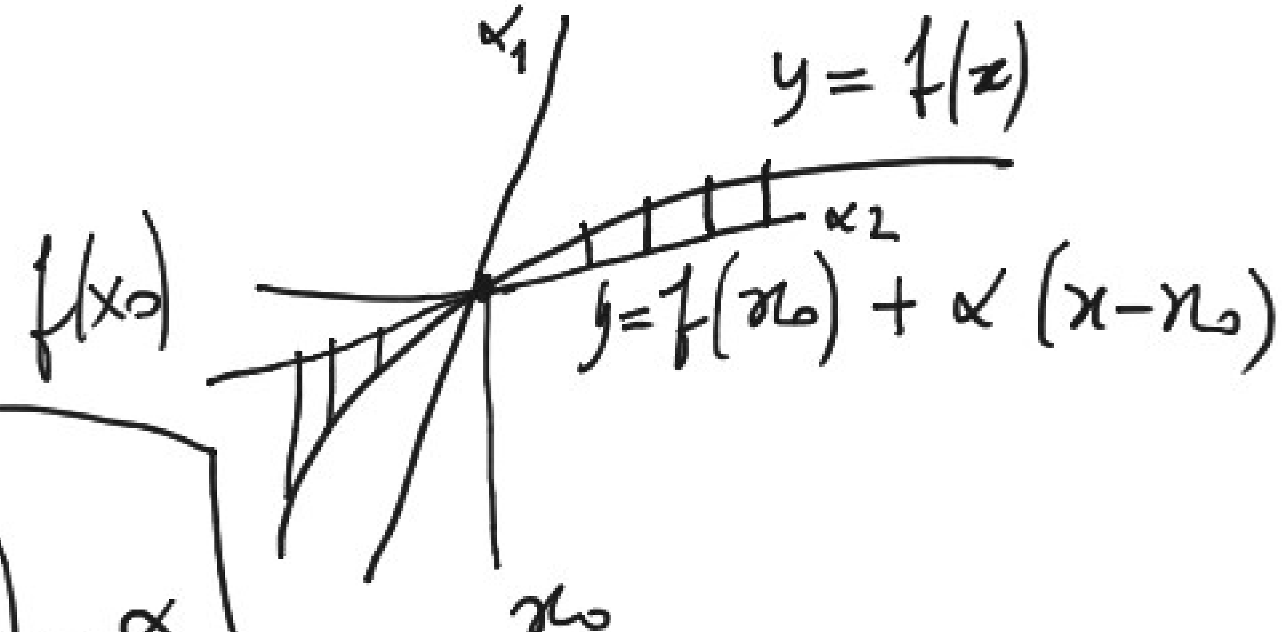
$h = x - x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha \longrightarrow \boxed{f'(x_0)-\alpha}$$

se f è derivabile in x_0

$= 0$ se $\alpha = f'(x_0)$

$\neq 0$ altrimenti



$f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)$

— è $O(x-x_0)$ se $\alpha \neq f'(x_0)$

— è $o(x-x_0)$ se $\alpha = f'(x_0)$

equazione del piano tangente al grafico di $f : \Omega \to \mathbb{R}$

nel punto $(x_0, \; f(x_0, y_0))$, differenziabile in (x_0, y_0)

è (per definizione)

$$z = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}_{df\left(x_0, \underbrace{x - x_0}_{w}\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ \text{graph} f \subseteq \underset{x_1 - x_n}{\mathbb{R}^n} \times \underset{z}{\mathbb{R}} \\ (x_1 \dots x_n, f(x_1, x_n)) \end{array}}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (w \to 0)}} \frac{\boxed{f(x_0 + (x - x_0))} - f(x_0) - df(x_0, x - x_0)}{|x - x_0| \; (|w|)} = 0$$

$x - x_0 = w$

$$\to \quad z = f(x)$$

$$\to \quad z = g(x) = f(x_0) - \overset{df(x_0, x - x_0)}{\underbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}_{\text{errore in } x - x_0}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x,y) \\ \text{graph} f = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\} \end{array}}$$