$$\underbrace{df(x_0, w)}_{= A(w)} = \underline{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) w_i} \equiv \nabla f(x) w$$

$$\uparrow$$

$$f \text{ differ. in } x_0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = A(v)} = \sum v_i \underbrace{A(e_i)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ dif. su $\mathbb{R}^2$ ed è 0 se $xy=0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(h \neq 0)} \boxed{? \; A(v) \overset{?}{=} 0 v_1 \overset{?}{+} 0 v_2 \overset{?}{\equiv} 0}$$

$f(x,y) = |xy| \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A(w) = 0w_1 + 0w_2 \equiv 0$

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{|hk| - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

numer. 2-omog.
den. 1-omog.
rapporto 1-omog $1>0$

1-omog.

limitata su $(\mathbb{R}^2 - \{0,0\}) \cap \partial B(0,1) = \partial B(0,1)$

per Weierstrass ← perché → chiuso limitato

numeratore e denominatore sono continui e denom. $\neq 0$ su $\partial B(0,1)$

$\neq 0$ su $\partial B(0,1)$

f è diff

A è il differenziale se $w=(h,k)$

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(h,k)-f(0,0)-A(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$$

0-omogenea non costante

$\Rightarrow$ NON HA LIMITE IN $(0,0)$

$\Rightarrow$ f NON E' DIFFER.

$$\frac{\partial f}{\partial(1,2)}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot(1,2) = 0\cdot 1 + 0\cdot 2 = 0$$

$|xy|$ ha minimo globale sugli assi

$\Downarrow$

Fermat

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$$

Fermat + f è differenziabile $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \ \forall i$

$\Leftarrow$

$\nabla f(x_0) w = 0$

$'' \ \frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = 0$

Il differenziale è unico

$$A(w) = df(x_0, w) \Longrightarrow \boxed{A(w) = \nabla f(x_0)\, w}$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)\right] = 0$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0 + w) - f(x_0) - B(w)\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[A(w) - B(w)\right] = 0 \longleftarrow \text{se, per assurdo, } A \neq B$$

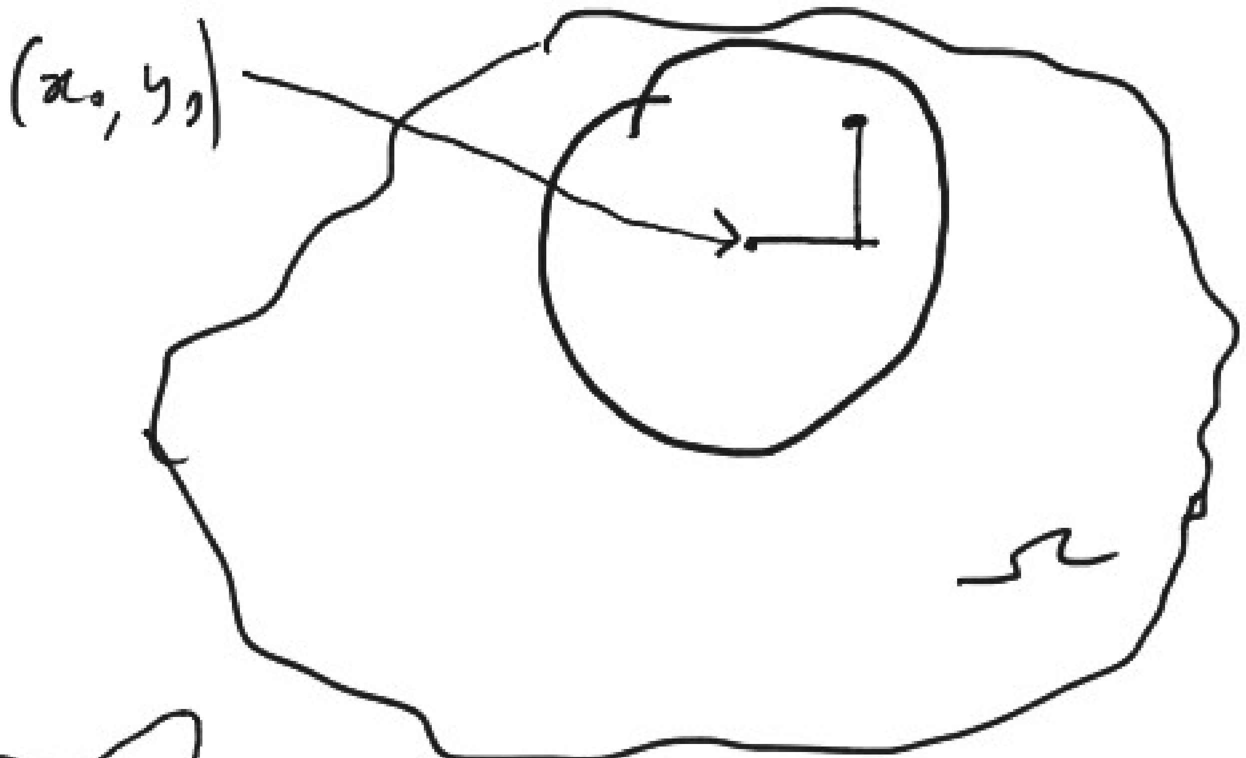
A, B lineari $\quad A(tx) = tA(x)$

0-omogenea non costante $\Longrightarrow$ lim **NON ESISTE**

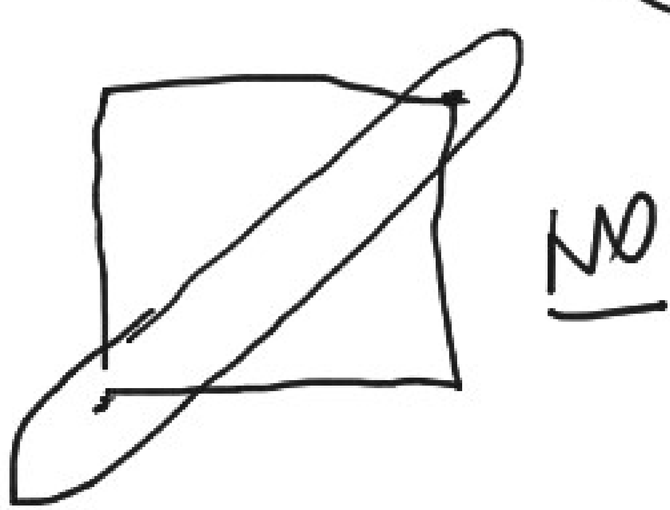
Teorema (del differenziale totale): Sia Ω aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $f_x , f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ esistano continue $\left(f \in C^1(\Omega) \right) \Rightarrow \exists\, df(x_0, w) \ \forall x_0 \in \Omega$

f è diff. in ogni punto di Ω.

DIM.



$$\boxed{df\big((x_0,y_0),\underbrace{(h,k)}_{w}\big) \overset{?}{=} f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k}$$



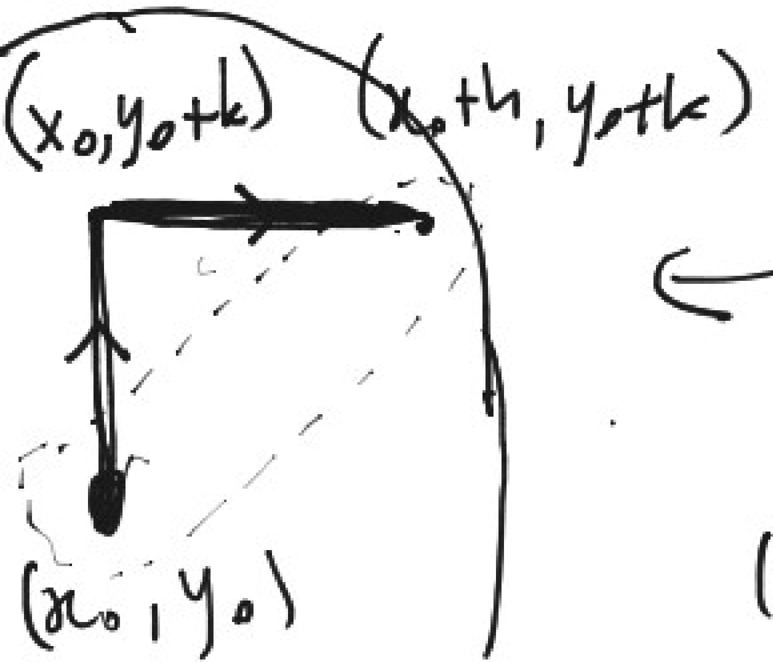
Occorre provare che ? $A(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$

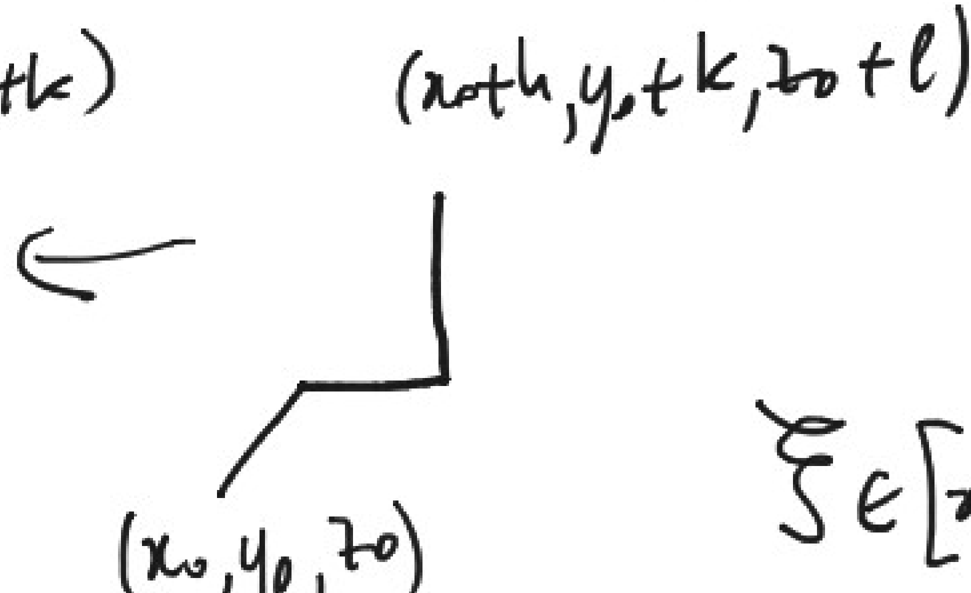
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\underbrace{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}\overbrace{-f_x h - f_y k}^{A(h,k)}\right] \overset{?}{=} 0$$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) = f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k) +$$

$$+ f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} f_x(\xi,y_0+k)(x_0+h-x_0) +$$

$$+ f_y(x_0,\eta)(y_0+k-y_0) = \boxed{f_x(\xi,y_0+k)h + f_y(x_0,\eta)k}$$





$t \to f(t,y_0+k)$ si applica

$\to s \to f(x_0,s)$ Lagrange

$\xi\in[x_0,x_0+h]$ $\quad$ $\eta\in[y_0,y_0+k]$

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{\left|[f_x(\xi, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)]h + [f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)]k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le$$

triang.

$$\le \lim_{(0,0)} \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{0 \le \;\cdot\; \le 1} \overbrace{\left|f_x(\xi, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)\right|}^{\to 0} +$$

cont u. d' f_x in (x_0,y_0)

$(\xi, y_0+k) \to (x_0,y_0)$

$$+ \lim_{(0,0)} \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \underbrace{\left|f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\right|}_{\to 0}$$

$(x_0,\eta) \to (x_0,y_0)$

$|h| \le \sqrt{h^2+k^2}$ $\qquad h\to 0 \quad \xi \in [x_0, x_0+h]$ $\quad$ comunque $\xi \to x_0$

$|k| \le \sqrt{h^2+k^2}$ $\qquad k\to 0 \quad \eta \in [y_0, y_0+k]$ $\quad$ " $\quad \eta \to y_0$

Esempio $f(x,y) = x^3 + y^2$ è diff. in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ perché è $C^1(\mathbb{R}^2)$ $f_x = 3x^2$ $f_y = 2y$

continue

$f(x,y) = |xy|$ si sa già che è diff.

$xy \neq 0$

$\boxed{f_x(h,k) \to f_x(0,0)}$

limiti in $\mathbb{R}^2$

$\boxed{f_y(h,k) \to f_y(0,0)}$

$\boxed{\dfrac{xy}{|xy|}\, y \xrightarrow{\to 0} 0}$

differenziale

non sempre è più comodo verificare che $f \in C^1$ (n limiti in n variabili) invece che usare la definizione di differenziale (1 limite in n-variabili)

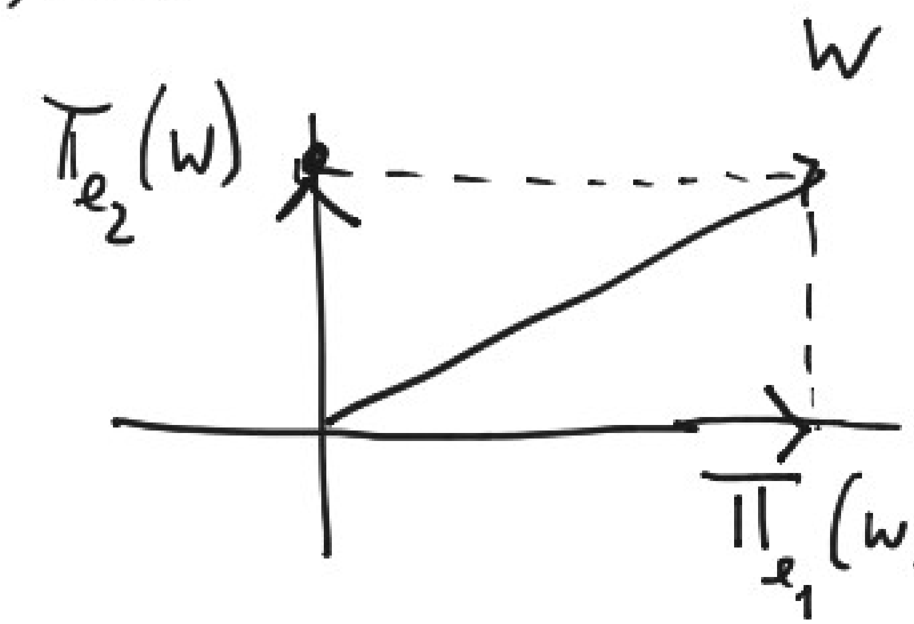
$$\boxed{df = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i}$$

negli esempi precedenti:

$$dx_1 = h \qquad dx_2 = k$$

$$(dx_1, dx_2) = (h, k) = w$$

$$df(x_0, w) = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, w_i$$



$$\boxed{\Pi_{e_i}(w) = w_i}$$

Π_{e_i} è lineare $\forall i$

$$d\Pi_{e_i}(x_0, w) = w_i$$

$$d\Pi_{e_i}(x_0, w) \equiv dx_i(x_0, w)$$

dx_i è una diversa (più antica) notazione per $d\Pi_{e_i}$, mai usata in pratica.

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \qquad \underbrace{\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n}$$

$$f' \quad \text{LEIBNIZ} \qquad \frac{df}{dx} \qquad \underbrace{dx}_{h}$$

∇ nabla

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\Big[f(x_0+h)-f(x_0)-\overbrace{\underbrace{f'(x_0)h}_{A(h)}}^{df(x_0,h)}\Big] =$$

$h\neq 0$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{h}{|h|}}_{\leq 1}\underbrace{\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f'(x_0)\cancel{h}}{\cancel{h}}\right]}_{\to 0} = 0$$

$\to 0$ se e solo se f è derivabile in x_0

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ è diff. se e solo se è derivabile}}$

$$df(x_0,h)=\underline{f'(x_0)h}$$

$f'(x_0)$ derivata $\qquad \nabla f(x)$ derivata

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad \gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|} \Big[\gamma(x_0 + w) - \gamma(x_0) - \underbrace{\dot\gamma(x_0)\, w}_{} \Big] \overset{?}{=} 0$$

prodotto scalare per vettore

$$\dot\gamma(x_0) = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(x_0) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(x_0) \end{pmatrix}$$

derivata o velocità

$$df(x_0, w) = \underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{}\, w}_{}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = Ax}$$