$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ f lineare $\Rightarrow$ f è differ.

TS $\quad \boxed{df(x_0, w) = f(w)}$ cioè

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - f(w)}{|w|} = 0.$$

Sì, perché

$$f(x_0+w) - f(x_0) - f(w) \equiv 0$$

$df(x_0, w) = aw$

$$\boxed{f \text{ lineare} \Rightarrow f(x_0+w) = f(x_0) + f(w)}$$

$f(x) = ax$

Il differ. non dip. da x_0, è costante in x_0

$f'(x) = a$

f è diff. in $x_0 \implies$ è continua in x_0

Dim $\lim_{w \to 0} |f(x_0+w) - f(x_0)| = 0 \iff \boxed{\lim_{w\to 0} f(x_0+w) = f(x_0)}$

$|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w)| \overset{\text{dis. triang.}}{\leq}$

$\leq |f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)| + |A(w)| =$

$= \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} |w| + |A(w)| \to 0$

$\frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} \to 0$ ipotesi di diff.

$|w| \to 0$

$|A(w)| \to 0$

$A(w) = A(\sum w_i e_i) = \sum_1^n w_i A(e_i)$

$w_i \to 0 \ \forall i$ se $w \to 0$

$$\boxed{f \text{ diff in } x_0} \Rightarrow \exists\ f_v(x_0) = df(x_0, v) = \underline{A(v)} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

<u>DIM</u>. $$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - A(v) = 0}$$ equivale alla tesi

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|t|} =$$

se il rapporto è infinitesimo allora lo è il suo modulo.

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|tv|} |v| \overset{tv=w}{=}$$

$|v|$ → è costante

→ è composta di $t \xrightarrow{\varphi} tv$ $\quad \psi(w) = \dfrac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}$

per il criterio del cambio di variabili

(funzione "più esterna" non definita per $w=0$)

il $\lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|} |f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)| =$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|} = 0$$

per ip. diff.

$\blacksquare$

$$\frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|t|} = \psi(\varphi(t))$$

$\varphi(t) = tv$

$$\psi(w) = \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}$$

A lineare

$$A(v) = A\left(\sum v_i e_i\right) = \sum v_i \underbrace{A(e_i)}_{= \boxed{\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

$$\underset{df(x_0, v)}{A(v)} = \boxed{\sum_{1}^{n} f_{x_i}(x_0)\, v_i} \longleftarrow = \sum v_i A(e_i)$$

$$\boxed{\nabla f(x_0)} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_0) \\ f_{x_2}(x_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v$$

GRADIENTE

di f in x_0

$\nabla f = f'$

$$\boxed{df(x_0, v) = \nabla f(x_0)\, v}$$

$$= f'(x)\, v$$