$$f_{x_i}(x_0) \equiv f_{e_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0 + t e_i) - f(x_0)\right]$$

l'unica variabile

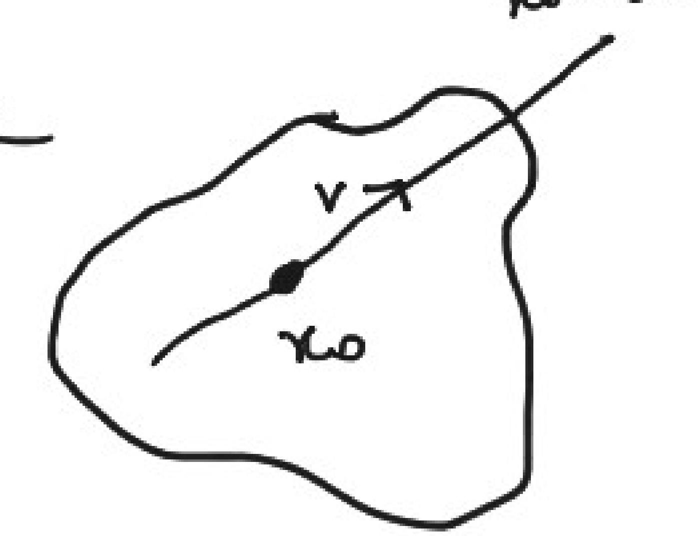
$$x_0 + t e_i = \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n\right)$$

tutte le componenti costanti e l'i-esima varia

il rapporto incrementale di $t \to f(x_0 + t e_i)$ in $t=0$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$$h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(0+t) - h(0)}{t} \qquad \overset{\parallel}{h(t)} \qquad h : I \to \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

per calcolare la derivata parziale i-esima si considerano tutte le variabili costanti salvo la i-esima



$$\frac{\partial}{\partial(1,2)} \sin(x^2 y) \quad \text{in } (0,0)$$

$$h(t) = f\left((0,0) + t(1,2)\right) = f(t, 2t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sin t^2(2t)\right]_{t=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 y) =$$

$$= \cos(x^2 y)(2xy)$$

$x_0 + tv$

$x_0 \leftarrow$ punto in cui si calcola

$tv \rightarrow$ direzione in cui si calcola

$f(x_0+tv)$

$\geq$

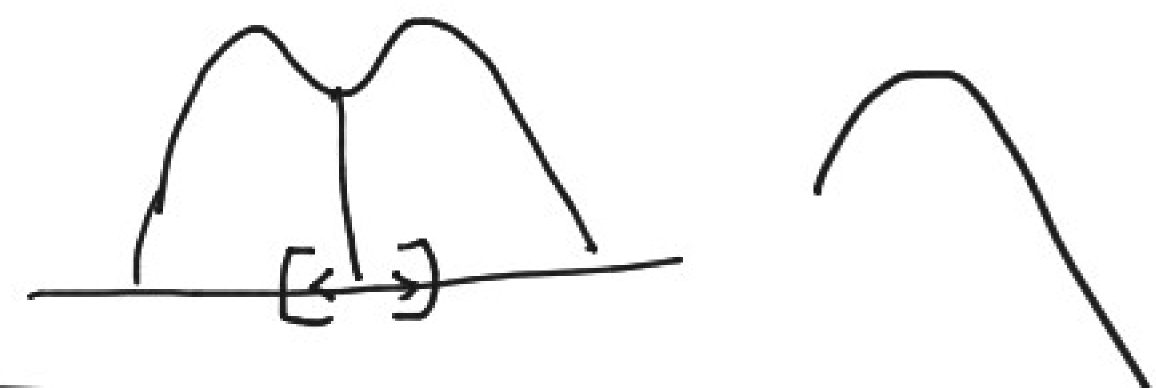
$f(x_0)$ per tutti i t;

$|t| < \frac{\delta}{|v|} \Rightarrow tv \in B(x_0,\delta)$ sulla quale

$f(x_1) \geq f(x_0)$

$x = x_0 + tv$

In Analisi I $\boxed{df(x_0,w) = \underbrace{f'(x_0)}\underbrace{w}}$



$z = f(x_0) + \underbrace{A(x-x_0)}$ piano tangente

in analisi I

$(x-x_0) \longrightarrow f'(x_0)(x-x_0)$

lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$w = x - x_0$

$$\boxed{df(x_0,w) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_{x_i}(x_0)}\, w_i}$$

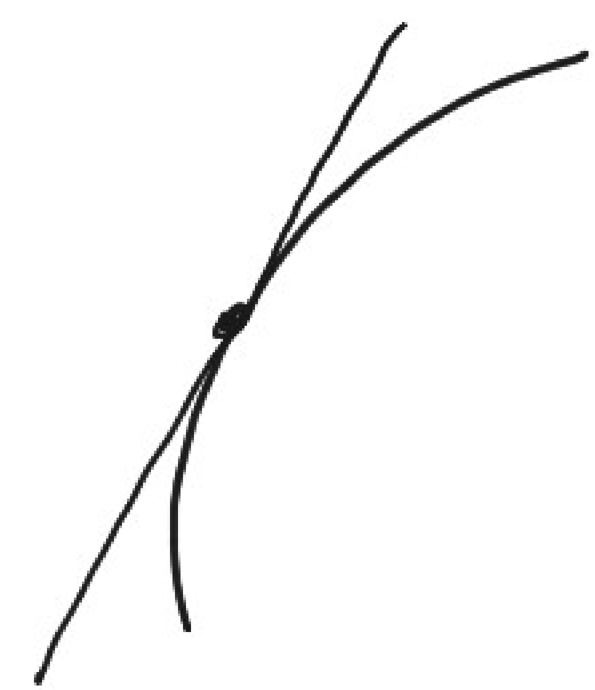
$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)}{|w|} = 0$$

Se si potesse prendere A non lineare

$$A(w) = f(x_0+w) - f(x_0)$$

$\Rightarrow$ il numeratore è $\equiv 0$

$$y = f(x_0) + \overbrace{d f(x_0, x-x_0)}^{\substack{w \\ f'(x_0)(x-x_0)}}$$



p polinomio non costante e $p(z_0) \neq 0$ $\exists z'$;

$$|p(z')| < |p(z_0)|$$

$p(z)$ / $|p(z)|$ diverge all'∞ perché p è un polinomio non costante

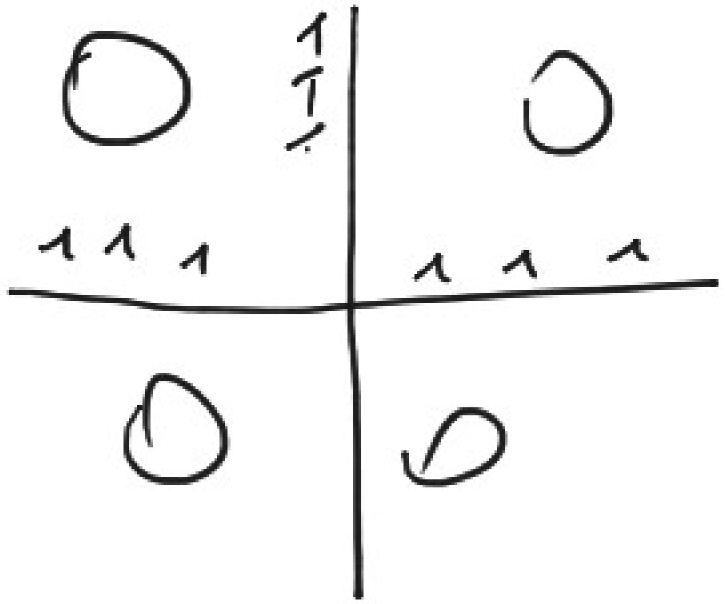
$\Downarrow$

$|p(z)|$ ha minimo (globale) in $\mathbb{C}$

e sia z^* (Per assurdo)

Proviamo che $f(z^*) = 0$. Se così non fosse, si avrebbe

$f(z^*) \neq 0 \Rightarrow \exists z'$: $|p(z')| < |p(z^*)|$ Assurdo perché z^* è di minimo globale



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$\parallel$$

$$f_{e_1}(0,0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\overset{=1}{f(t,0)} - \overset{=1}{f(0,0)}}{t} = 0 \quad \forall t \neq 0$$

$$f_{x_i}(x_0) \equiv f_{e_i}(x_0)$$

$$f\Big(\underbrace{\tfrac{\delta}{2} x_n}_{y_n}\Big) = \qquad y_n = \frac{\delta}{2} x_n \qquad |y_n| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y_n \in B(0,\delta)}$$

$$= \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} f(x_n)$$

$y_n \in \operatorname{dom} f$ perché dom f è un cono

<u>$y_n \neq 0$ perché è un multiplo non nullo d'un vettore non nullo</u>

Se $\lim_{0} f(x) = 0$

$$\bar{\varepsilon} = 1 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \quad x \neq 0 \quad \underbrace{|x - 0| < \delta}_{x \in B(0,\delta)} \quad \underbrace{|f(x)| < \bar{\varepsilon}}_{= 1}$$

$$\Big|f\Big(\underbrace{\tfrac{\delta}{2} x_n}_{x}\Big)\Big| = \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} |f(x_n)| > \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} n > 1$$

<u>è falso</u>

$$n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\alpha}$$

f α-omog. $\alpha>0$ $\quad \lim_{0} f(x)=0 \iff f$ è limitata su $\operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$

CN $\Longrightarrow$ supp. $\exists \lim_{0} f(x)=0 \Rightarrow$ f è limitata.

Per assurdo, sia $\lim_{0} f(x)=0$ ma sia f non limitata

$$\forall\, \varepsilon=n \quad \exists\, \underbrace{x_n \in \operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)}_{x_n \in \operatorname{dom} f \text{ e } |x_n|=1} : \quad |f(x_n)|>n$$

Se fosse $\lim_{0} f(x)=0$ varrebbe la condizione di Cauchy

$$\bar{\varepsilon}=1 \quad \exists\, \delta>0 : \quad \underbrace{x,y \in \operatorname{dom} f, \quad x,y\in B(0,\delta), \quad x,y \neq 0}, \quad \underline{|f(x)-f(y)|<1}$$

$x = \frac{\delta}{2} x_1$, $y = \frac{\delta}{2} x_n$ verificano: $|x| = \frac{\delta}{2}|x_1| = \delta/2 < \delta$, $|y| = \frac{\delta}{2}|x_n| = \delta/2 < \delta$

%