$\sum a_{ij} x_i x_j$ cambiando coordinate da base canonica a base spettrale

diventa

$$\|$$

$$\sum \lambda_i x_i'^2 \quad \text{verifica} \quad \underbrace{\min \lambda_i}_{\lambda} |x'|^2 \leq \sum \lambda_i x_i'^2 \leq \underbrace{\max \lambda_i}_{\Lambda} |x_i'|^2$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$

$$\lambda \left(\sum x_i'^2 \right) \leq \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 \leq \Lambda \sum x_i'^2$$

SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE

AL_7.13

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) <u>non è simmetrica</u>

2) Si calcola lo spettro $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \cancel{-3} - \left[6-3\lambda \cancel{-3} + \lambda\right] = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \underbrace{-6+2\lambda}_{-2(3-\lambda)} =$$

$$= (3-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right] =$$

$$= (3-\lambda)\left[\underbrace{\lambda^2 - 3\lambda}_{\lambda(\lambda-3)}\right] = -(3-\lambda)^2 \lambda$$

$\underline{\lambda = 0}$ $\underline{\mu = 1}$

$\lambda = 3$ $\underline{\mu = 2}$

È diag. se $\underbrace{\dim A^{\lambda=3}} = 2$

$$0 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}}_{A-\lambda I}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$III + \frac{1}{2} I$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

pivot

non-pivot

dim soluzioni $= \#$ non-pivot $= 1$

$\dim A^3 = \underline{1 < 2} = \mu$

NON È DIAGONALIZZABILE

$u, v \in \mathbb{R}^n$ $\quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$uv = \sum_{1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$\underline{|u+v|^2 = (u+v)(u+v)} = u(u+v) + v(u+v) =$$

$$= \overbrace{u \cdot u + uv} + \overbrace{vu + vv} =$$

in $\mathbb{R}^n$ $uv = vu$

$$= |u|^2 + 2uv + |v|^2$$

$$\boxed{|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2uv}$$

$\mathbb{R}^3$ $\quad u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

$$(1, 2, -1)(2, 1, -2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1)(-2) = \dots$$

$$\phi(v,w) = \boxed{2\,\underline{v_1} v_2 + \underline{v_1} w_2 + \underline{v_2} w_1 - \underline{v_2} w_2 - \underline{v_3} w_3} \to v_i (a_{ij} w_j)$$

riga colonna

forma bilineare

$$\boxed{\phi(v,w) = \sum_{1}^{n} a_{ij} v_i w_j}$$

a_{ij} qualunque

$\bar{v}$ costante allora $w \to \phi(\bar{v}, w)$ è lineare
(polinomio di I grado nelle incognite w_1, w_2, v_3

$\bar{w}$ costante allora $v \to \phi(v, \bar{w})$ è lineare per lo stesso motivo.

$\Downarrow$

ϕ è bilineare

$\underline{\phi(x,x)\text{ è quadratica}}$

$\downarrow$ $\underline{w = v = x}$

$$2x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_1 - x_2x_2 - x_3x_3$$

$$\boxed{4x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2}$$

$H(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ è definita

$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$

↳ simmetrica

$H \longleftrightarrow \tilde{a}_{ij}$

(*) $\lambda |x|^2 \le \underbrace{\sum a_{ij} x_i x_j}_{H(x)} \le \Lambda |x|^2$

$\uparrow$ min. autovalore $\qquad \uparrow$ max autovalore

$\boxed{\text{AL\_7.1}}$, Tutti

Segno delle

Se H è definita positiva $\lambda > 0$

$$H(x) \ge \lambda |x|^2 \ge 0$$

$$H(x) = 0 \Rightarrow \lambda |x|^2 = 0 \quad \lambda > 0 \Rightarrow$$

$$|x|^2 = 0 \Rightarrow |x| = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Se H è def. $< 0 \Rightarrow \Lambda < 0$