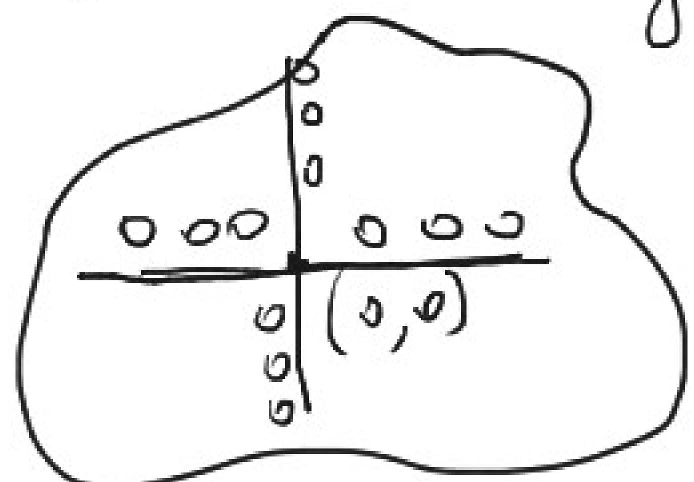
$f(x,y)=|xy|$ $\exists\, f_x(0,0)\,,\ f_y(0,0)$?

f è composta di $g(x,y)=xy$ $h(t)=|t|$ $h'(0)$ N.E.

$|x^2| = x^2$ è deriv. in 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h^2|-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0$$

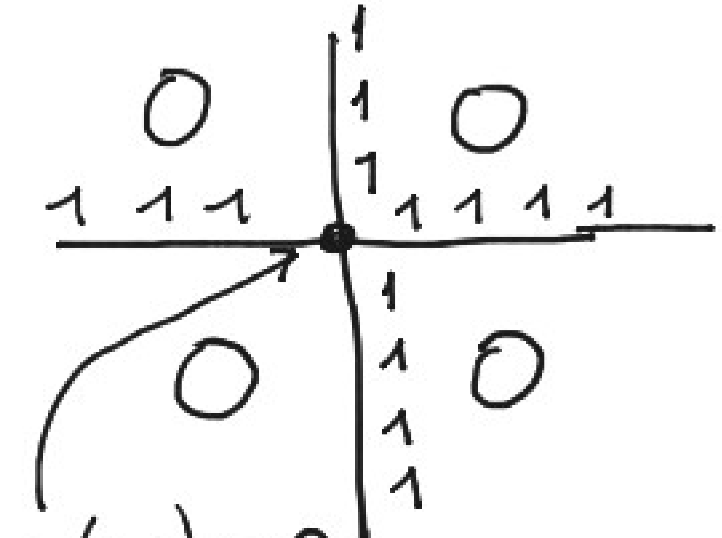
f è ident. 0 dove $xy=0$ cioè sugli assi $\Rightarrow$ f è costante sugli assi.



$y=0$

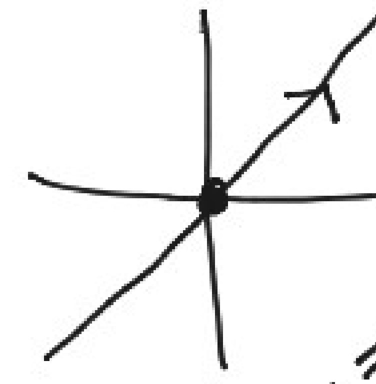
$$f\big((0,0)+t\underbrace{(1,0)}_{e_1}\big) = |t\cdot 0| = 0\ \forall t \Rightarrow h'(0)=0$$

$h(t)=f(x_0+tv)$ è costante $=0$ su l'asse x e y



$\alpha_x(0,0)=0$

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{sugli assi } (xy=0)\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0)=\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{f\big((0,0)+t(1,1)\big)}_{f(t(1,1))\equiv 0}\Big](0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{=0}{f(h,h)}-\overset{=1}{f(0,0)}}{h}=$$

$(h\neq 0)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$$

$x_0=(0,0)$
$v=(1,0)$
$t=h$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{h}$$ NON ESISTE

$$f(x,y)=|x^2-y^2|$$

$\exists f_x(0,0)$ $\exists f_y(0,0)$?

$$\frac{f\big((0,0)+h(1,0)\big)-f(0,0)}{h}=\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{|h^2|-0}{h}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f\big((0,0)+h(1,0)\big)}_{f(h,0)} - \underbrace{f(0,0)}_{=1}\Big] =$$

$h \neq 0$ $\quad f(h,0) = \dfrac{\sin(h^2)}{h^2}$

$$= \lim_{0} \frac{\frac{\sin h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_{0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} = 0$$

$t = h^2$ $\quad \dfrac{\sin h^2 - h^2}{h^6} \cdot \dfrac{h^6}{h^3} \to 0$

$-\frac{1}{6}$

$$\boxed{\begin{gathered} f \text{ è continua in } (0,0) \text{ perché} \\ \lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \\ t = x^2+y^2 \\ \frac{\sin t}{t} \text{ non è definita in } 0 \end{gathered}}$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$

$\sin t - t = -\frac{1}{3!} t^3 + o(t^3)$

$\boxed{\text{Th. FERMAT}}$

AN I

PUNTO DI MINIMO LOCALE

$x_0 \in \Omega$ si dirà di <u>minimo locale</u> per $f:\Omega\to\mathbb{R}$

se $\exists\, \delta>0 : \underline{f(x)\ge f(x_0)}\quad \forall x\in\Omega\cap B(x_0,\delta)$

massimo locale

$f(x)\le f(x_0)$

$f:\Omega\to\mathbb{R}$

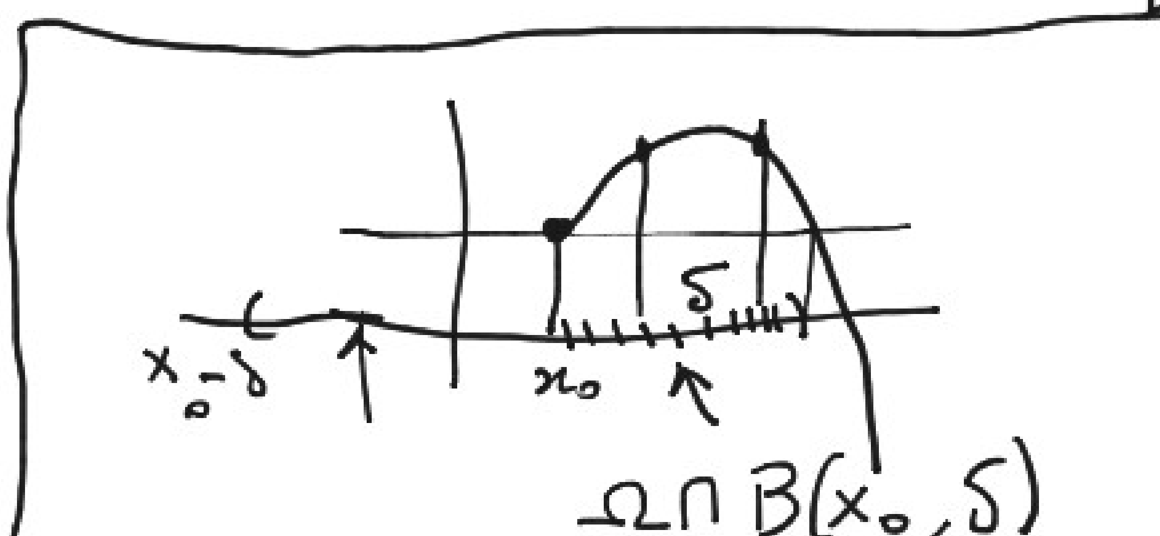
1) x_0 punto di min. locale

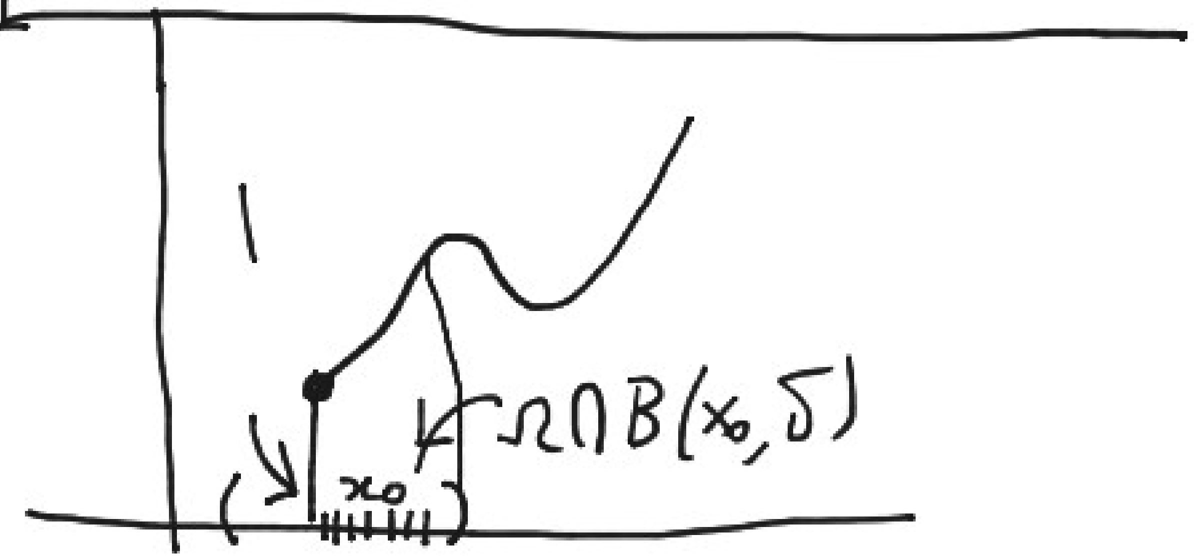
2) $x_0 \in \mathring{\Omega}$ (interno ad Ω)

3) $\exists\, f'(x_0)$

$\Downarrow$

$$f'(x_0)=0$$





Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

$x_0 \in \Omega$ e

- x_0 è di minimo locale per f
- x_0 è interno ad Ω $(x_0 \in \mathring{\Omega})$
- $\exists\, f_v(x_0)$ per qualche $v \neq 0$

$\Longrightarrow f_v(x_0) = 0$

DIM. Sia $\sigma > 0$: $B(x_0, \sigma) \subseteq \Omega$ che esiste per l'ip. 2).

Dall'ipotesi 1) $\exists\, \rho > 0$:

$f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in \Omega \cap B(x_0, \rho)$

$\delta = \min\{\rho, \sigma\}$

$B(x_0, \delta) \subseteq B(x_0, \rho) \cap B(x_0, \sigma)$

$f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$

h

$h(t) = f(x_0 + tv)$

quella dell'ipotesi

$h(0) = f(x_0)$

$\delta > \text{dist}(x_0 + tv, x_0) = |x_0 + tv - x_0| = |t||v|$ $\iff |t| < \frac{\delta}{|v|}$

$\Longrightarrow f(x_0 + tv)$ è definita se $|t| < \delta/|v|$

e dunque

$h : \left] -\frac{\delta}{|v|}, \frac{\delta}{|v|} \right[\to \mathbb{R}$

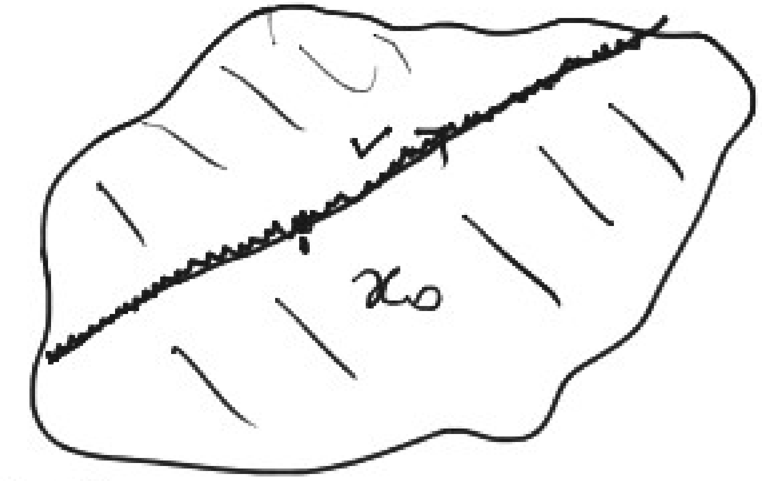
0 è interno a

$h'(0) = f_v(x_0)$

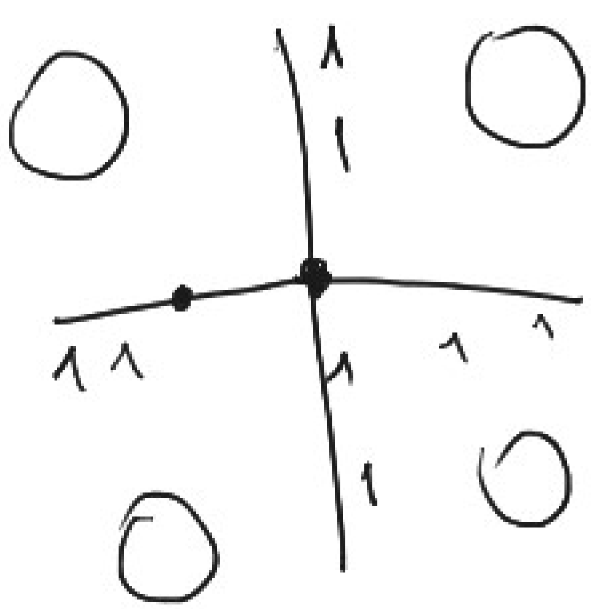
$\Longrightarrow$ Th. Fermat in 1 variabile

$h'(0) = 0$ e cioè $f_v(x_0) = 0$

Basta considerare la restizione di f alla retta $x_0 + tv \cap \Omega$



$$f_v(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big[\underbrace{f(x_0+tv)}_{h(t)} - \underbrace{f(x_0)}_{h(0)}\Big] = \lim_{t \to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t} = h'(0)$$



$(0,0)$ è di massimo globale, interno al dom. $\underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$

in $(0,0)$ esistono solo due derivate direzionali $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ $\Longrightarrow$ le derivate sono $\underline{\text{nulle}}$

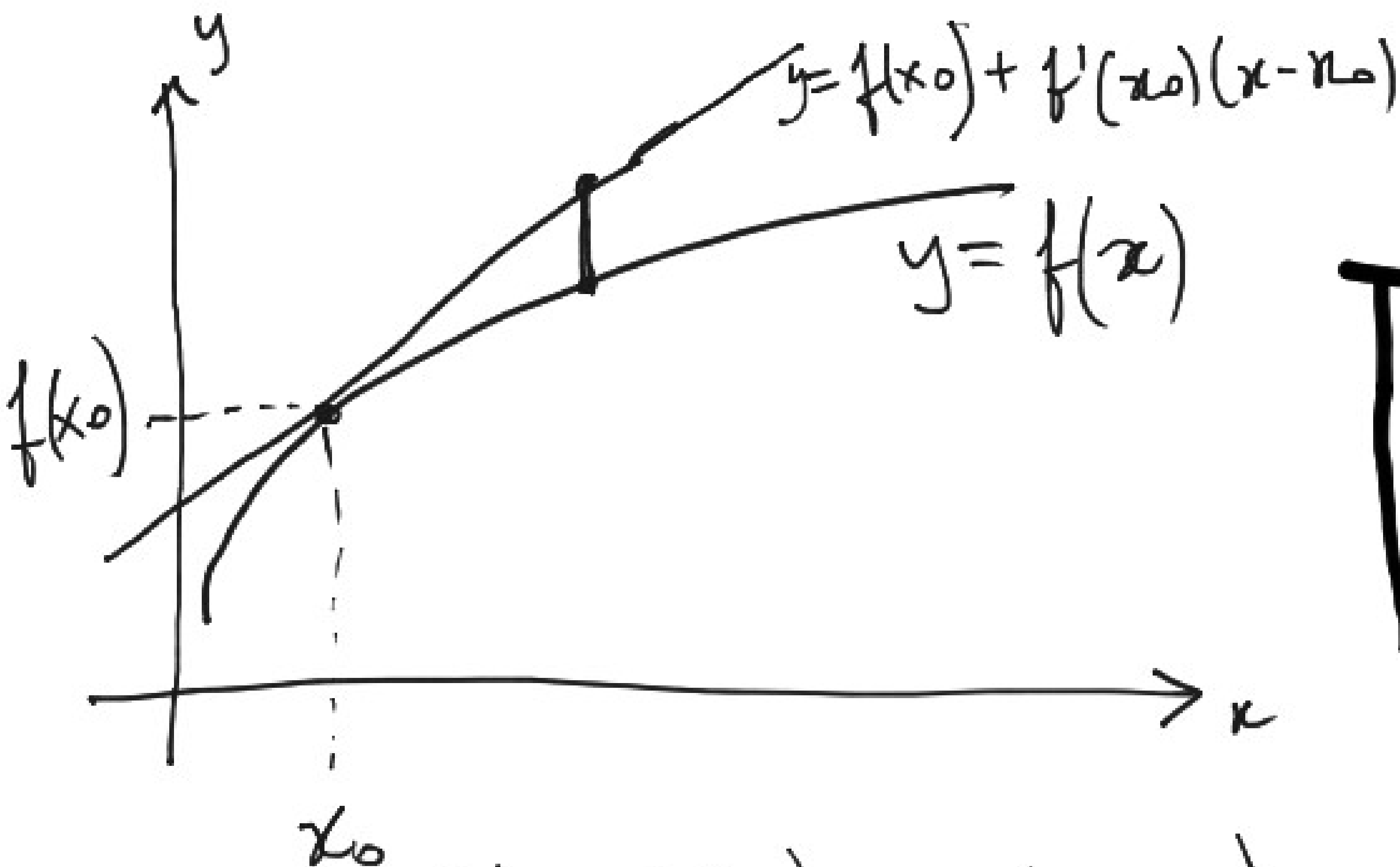
lo stesso in $(-1,0)$ (esiste solo $f_x(-1,0) = \underline{\underline{0}}$

DIFFERENZIALE

derivabilità $\not\Longrightarrow$ continuità

direzionale

$\longrightarrow$ pendenza



$$\boxed{\exists \text{ retta per } (x_0, f(x_0)) \text{ che approssima meglio il grafico di } f}$$

$$f(x) - \underbrace{\left(f(x_0) + \alpha(x - x_0)\right)}_{\text{funzione che ha}}$$

per grafico una retta (non vertic) per il punto $(x_0, f(x_0))$

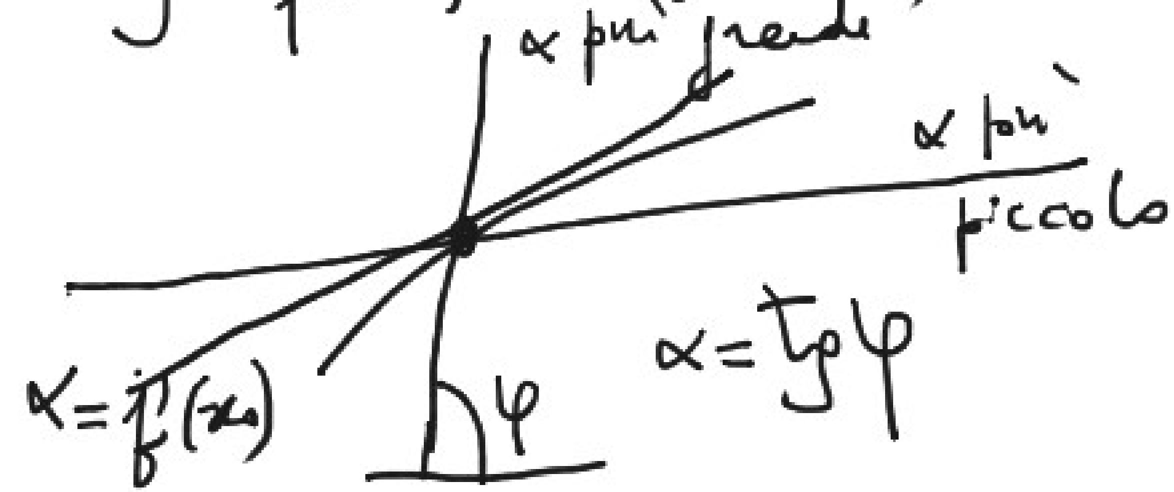
$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{f'(x_0) - \alpha}$$ se $\exists f'(x_0)$

$\neq 0$ se $\alpha \neq f'(x_0)$

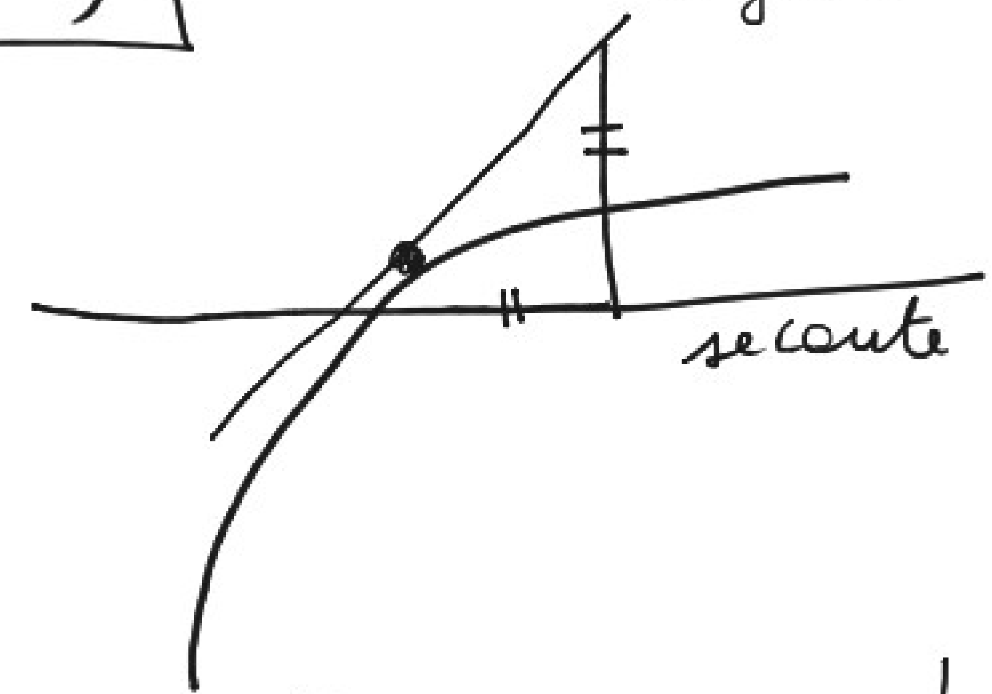
$= 0$ $\alpha = f'(x_0)$



$$\alpha = \operatorname{tg} \varphi$$

Si definisce retta tangente al graph f in $(x_0, f(x_0))$

la retta $$y = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{g(x)}$$



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0}$$

DEFINIZIONE $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$.

Diremo che f è differenziabile in x_0 se esiste $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ **LINEARE** tale che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ W \to 0}} \frac{1}{|W|}\left[f(x_0 + W) - f(x_0) - A(W)\right] = 0$$

$W = x - x_0$

$x = x_0 + W$

$A(w)$ si dirà differenziale di f in x_0 nella direzione di w e si denoterà con il simbolo

$$\boxed{df(x_0, w)} \equiv df$$

A dipende da x_0 e dipende anche dall'incremento w